АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА И ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ НА ОСНОВЕ ТЕНЗОРНЫХ ДЕКОМПОЗИЦИЙ

Юрий Минаев, Николай Гузий,
Оксана Филимонова, Юлия Минаева

Аннотация: *Рассматривается проблема решения задач принятия решений в условиях неопределенности при помощи методов и моделей теории нечетких множеств с ограниченными возможностями назначения функций принадлежности. Показана возможность формирования подмножества упорядоченных пар, в котором одна из компонент аналогична функции принадлежности, путем тензоризации универсального множества с последующей сингулярной декомпозицией. В качестве одного из способов тензоризации и учета феномена нечеткости предложено использовать Теплицеву матрицу с выбором главной диагонали, наиболее эффективно моделирующую нечеткость. Универсальное множество, на котором сформировано нечеткое множество, в тензорном формате содержит скрытую информацию, которая может быть использована при принятии решения не менее эффективно, чем эвристически назначенная функция принадлежности. Приведены примеры, показывающие высокую эффективность использования подмножества упорядоченных пар при решении реальных задач в условиях неопределенности.*

Ключевые слова: *принятие решений, условия неопределенности, нечеткое множество, функция принадлежности, тензор, сингулярная декомпозиция, Теплицева матрица, подмножество упорядоченных пар.*

ACM Classification Keywords: *G.1.0 Mathematics of Computing– General – Error analysis; G.1.6 Mathematics of Computing – NUMERICAL ANALYSIS – Optimization -; I.2.3 Computing Methodologies - ARTIFICIAL INTELLIGENCE - Uncertainty, “fuzzy”, and probabilistic reasoning; I.2.6 Computing Methodologies - ARTIFICIAL INTELLIGENCE*

Введение

Теория Нечетких Множеств (ТНМ) в настоящее время является востребованным аппаратом решения задач (в частности, принятия решений) в условиях неопределенности . Математический аппарат ТНМ хорошо разработан, он корректен.

Основополагающими парадигмами ТНМ являются следующие:

- ТНМ моделирует психологический процесс принятия решения человеком в условиях неопределенности;

- функция принадлежности (ФП) формализует этот процесс, представляет собой неявное знание.

В последнее десятилетие в науке и практике возник ряд задач и научных направлений, где применение ТНМ столкнулось с непредвиденными трудностями. В частности, использованное в ТНМ понятие ближайшего множества (четкого [Кофман, 1982]) не коснулось определения ближайшего нечеткого множества (НМ) или любого другого [Zhang and Ding,2013], что снизило потенциальные возможности ТНМ [Zimmermann, 2001; Круглый стол, 2001]. В экономической науке появилось новое научное направление, связанное с т.н. теорией перспектив, которое переросло экономику, т.к. декларированные и практически доказанные авторами – [Kahneman and Tversky,1979, 1992; Канеман и Тверски, 2003] - положения оказались ведущими для принятия решений в условиях неопределенности не только для экономической науки [Павлов, 2007].

В работе [Нариньяни, 2008] показано, что ТНМ, в которой нечеткое множество - основной объект теории, на самом деле - один из видов многочисленных НЕ-факторов, нуждается в качественной модернизации изначальной методологии исследования. Целый ряд практических приложений ТНМ вскрыл ограниченную возможность решения многих классов задач. В работах [Dug Hun Hong, 2001; Ягер, 1986] показано, что не существует инверсий для нечетких чисел в операциях арифметического сложения и умножения. Недостаток инверсии становится значимым при использовании нечетких чисел в приложениях, реализующих мультиаспектные процессы принятия решений, анализ допусков в сложной системе и др.

Прикладные специалисты используют НМ в различных областях, где имеет место неопределенность, неточность или другие НЕ-факторы [Воробьев, 2007]. Парадигма ТНМ о том, что выбор функции принадлежности человеком (экспертом) на основе здравого смысла и опыта, **всегда** является рациональным, не выдерживает критики. В соответствии с исследованиями Нобелевских лауреатов Д.Канемана и Д.Тверски [Kahneman and Tversky,1979, 1992] до 75 % решений, принимаемых личностью, относятся к т.н. аномалиям рационального поведения. Отсутствие ответов на «элементарные» (с точки зрения пользователей ТНМ) вопросы приводит к росту количество операций над НМ, практически в каждой оригинальной работе есть попытки ввести новые операции, объясняя это спецификой задачи.

Вместе с тем, решение многих задач в условиях неопределенности с успехом реализуют методы и модели тензорных декомпозиций (ТД). В работе [Родионова, 2006] показано, что применению ТД при моделировании объекта в условиях неопределенности в существенной мере способствовало то, что одна из отраслей науки – *хемометрика*, родившаяся на стыке химии и математики, показала не только реально значимые результаты в решении *своих* задач, но и возможность распространения разработанного математического аппарата на другие отрасли знаний.

Выяснилось, что одна из важных задач искусственного интеллекта – извлечение наиболее существенной информации при анализе ограниченного объема доступных данных (неопределенность) – достаточно эффективно решается представителями хемометрики. Естественно желание использовать эти возможности в ТНМ, несмотря на свои очевидные ограничения, ТНМ это наиболее распространенная методология решения задач в условиях неопределенности.

Теория нечетких множеств декларирует универсальность своих моделей и всеобщность их применения, хотя существует целый ряд процессов, объектов, явлений, не поддающихся содержательному (формальному) представлению в виде НМ (в смысле Л.Заде) в силу сложности происходящих процессов или их недостаточной изученности. Возникают ситуации, где здравый смысл и опыт (экспертные оценки) существенно ограничены. По мнению авторов данной работы, несомненные успехи ТНМ в большой степени связаны с тем, что в качестве рабочей модели применяется новая структура – *подмножество упорядоченных пар* с назначением одной из компонент смысла весовой функции. Выскажем мысль, что синтез ТНМ и ТД может открыть новые возможности *в мягкой математике* [Андрианов, 2013].

Как известно, одной из задач, решаемых интеллектуальными системами, является выделение *скрытых знаний* в составе исходного множества данных (ИМД), в частности в составе универсального множества (УМ), на котором формируется нечеткое множество. Это предполагает учет многофакторых данных без предварительного выделения т.н. *существенных* (субъективно назначенных) факторов. Обратим внимание, что ТНМ использует ИМД практически только для назначения УМ, на котором определяется НМ, а ФП назначается экспертно (здравый смысл × опыт эксперта) с минимальным использованием состава ИМД. Кроме того, возможности УМ в смысле получения новых (скрытых) знаний практически не используются.

Современное состояние проблемы

Недостаточность функции принадлежности (с точки зрения представления неопределенности) для целого ряда ситуаций показана практически одновременно с созданием теории НМ. В работах [Atanassov, 1986,1989] предложены т.н. *интуционистстские* НМ (IFS), определяемые на универсуме U: IFS над U – множество упорядоченных троек: элемент универсума, степень членства M, степень не-членства N так что $M + N \leq 1$ и $M, N \in [0, 1]$. Когда $M + N = 1$ получаем НМ, и если $M + N < 1$ есть неопределенность, которая равна $I = 1 - M - N$. На основании упорядоченных троек IFS дополнительно предложены несколько обобщений НМ [Круглый стол, 2004] .

С другой стороны, до сих пор не нашел отражения в научной литературе факт определенной избыточности ФП, состоящий в том, что в ряде случаев представление нечеткого утверждения (например, типа *близко к…, примерно равно…* и др.) в виде НМ не зависит от вида ФП. В соответствии с принятыми в ТНМ принципами выполнения арифметико-логических операций, формулируемое утверждение может моделироваться НМ с любой ФП из стандартных библиотек, например MATLAB, получая близкое дефадзифицированное значение и практическую близость по норме. Это позволяет полагать существование некоторой обобщающей ФП. Обратим внимание на то, что метода или способа сравнительной проверки рациональности выбора ФП не предложено.

Прежде чем перейти к изложению предлагаемой тензорной (альтернативной) методологии моделирования неопределенности без экспертного назначения ФП, основанной на использовании альтернативных подмножеств упорядоченных пар, где одна из комонент – весовая функция, обратим внимание на основные принципы, положенные Л.Заде в основу созданной им ТНМ, используя работу [Турксен, 2005]. В этой работе отмечены оригинальные идеи и модели, введенные Л.Заде, в частности новые подходы к анализу сложных человеко-машинных систем, которые открыли принципиально новые возможности решения задач управления в условиях неопределенности, используя нотацию «рассуждений, похожих на *рассуждения здравого смысла у человека»*.

Психологи в своих исследованиях пришли к пониманию того факта, что одна из самых замечательных человеческих способностей - выполнять решение широкого круга физических и психических задач, в т.ч. принятие решений, не прибегая к измерениям или вычислениям, связана именно со здравым смыслом (ЗС). В основе этой способности лежит важнейшее свойство человеческого мозга, связанное с манипулированием сенсорно-перцептивными образами: ощущениями расстояния, размера, веса, силы, цвета, сходства, истинности и других физических и психических характеристик. Основное отличие между перцептивными оценками и измерениями заключается прежде всего в том, что измерения являются четкими, тогда как оценки – нечеткими.

Вместе с тем, ни в одной из работ огромная армия специалистов, занимающихся теорией НМ, не дала хотя бы рабочее определение здравого смысла, на который возложены такие колоссальные задачи. Попутно укажем, что нобелевские лауреаты Д.Канеман и А. Тверски [Канеман и Тверски, 2003] рассматривают ЗС объективно и достаточно сдержанно. На наш взгляд, наиболее компетентную трактовку данного термина дает Merriam Webster, согласно которому ЗС подразумевает «… разумное суждение, основанное на <u>обычном</u> восприятии ситуации или фактов» [Merriam-Webster, 2008]». Это определение предполагает, что ЗС зависит от того, насколько <u>*просто*</u> оценивается ситуация, обращаясь к опыту и общей осведомленности о ситуации (здравое и разумное суждение), уверенность в себе, применимости полученного опыта в будущих проблемных ситуациях.

В работе [Albrecht, 2007] ЗС назван *практическим интеллектом* и определяется как "умственная способность справляться с проблемами и возможностями жизни». Но главное состоит в том, что здравый смысл *зависит от ситуации и обстоятельств*, конкретно ЗС в одном из аспектов жизни может проявлять себя безупречно, а в другом – отсутствовать. Цели ЗС - это в основе своей мысли, которые позволяют предотвратить личность от *нерациональных ошибок* или решений, и дает возможность увидеть картину в целом.

Обратимся снова к Канеману Д. и Тверски А. [Канеман и Тверски, 2003], показавших, что способность человек принимать рациональные решения, основываясь на здравом смысле, не превышает 15÷20 %, в остальных случаях – принимаемые решения относятся к т.н. *аномалиям рационального поведения* и зависят от целого ряда факторов. Функции принадлежности, принятые на основе ЗС, по определению не могут быть все 100 % рациональными. Укажем, что в соответствии с работами [Канеман и Тверски, 2003], [Нариньяни, 2008] ЗС в ряде задач принятия решений в условиях неопределенности продиктован подходами математической статистики и его можно сформулировать в форме утверждения «…*ближе к центру*».

Сделаем одно замечание. В математике и логике существуют т.н. *правдоподобные* выводы и рассуждения, основанные на здравом смысле. В известной работе [Пойа, 1975] приводятся примеры, когда правдоподобные выводы или рассуждения являются математически некорректными, в то же время корректные математически выводы (рассуждения) часто представляются неправдоподобными, не имеющими ничего общего со здравым смыслом. Обратим внимание, что интуиция ученого, весьма отдаленно связанная со ЗС, играет решающую роль в принятии рационального решения.

Заканчивая анализ состояния проблемы, обратимся к работам [Круглый стол ,2001], [Тарасов, 2006] , в которых группой известных специалистов приводится видение будущего ТНМ как науки. Каноническая версия ТНМ, предложенная в 1965 г. Л. Заде, опирается на понятие функции принадлежности, которое представляет собой прямое обобщение двузначной характеристической функции. Она использует весьма сильные логические допущения о природе принадлежности. Главными из них являются: а) принцип бивалентности; б) принцип различимости; в) принцип взаимной компенсации принадлежности и непринадлежности. Согласно принципу бивалентности, любой элемент либо принадлежит, либо не принадлежит множеству: третье исключено.

Область значений принадлежности НМ вовсе необязательно должна быть интервалом [0,1] и, вообще, интервалом чисел: это может быть некоторая структура (цепь, решетка L, решеточно упорядоченный моноид и др.). Тем не менее, большинство известных расширений нечетких множеств (например L-нечеткие множества, которые представляют собой функции вида $A: X \rightarrow L$) также опираются на принципы бивалентности однозначности и взаимной компенсации [Тарасов, 2006]. Во многих реальных ситуациях наряду с нечеткостью требуется учитывать другие возможные НЕ-факторы [Нариньяни, 2008]: неточность, неопределенность, недоопределенность, противоречивость и др. Это означает необходимость перехода к новым базовым семантикам принадлежности. Наконец, для расширения областей значений функций принадлежности могут использоваться произведения решеток.

Новый виток развития ТНМ обусловлен введением нетрадиционных и гибридных нечетких множеств. К числу нетрадиционных относятся векторнозначные, интервальнозначные, нечеткозначные, гетерогенные, двухосновные нечеткие множества. Примером двухосновных нечетких множеств являются интуиционистские нечеткие множества [Atanassov, 1986], [Atanassov,1989], описываемые парами функций принадлежности μ и непринадлежности ν соответственно, $\tilde{A} = \{(x, \mu_A(x), \nu_A(x))\}$,где $\mu_A: X \to [0,1]$, $\nu_A: X \to [0,1]$. Таким образом, здесь допускаются пресыщенные оценки «принадлежности – непринадлежности», причем $\mu_A(x)+\nu_A(x) \leq 1$.

Другим показательным примером служат обобщенные нечеткие оценки на полярных шкалах $\tilde{A}=\{(x, \mu_{A+}(x), \mu_{A-}(x)\}$. В работе [Тарасов, 2006] с целью развития единого подхода к построению нетрадиционных и гибридных нечетких множеств предлагается понятие BL-нечеткого множества, которое выражается функцией $A: X\to BL$.

Основной информационной гранулой в ТНМ является НМ, получаемая информация зависит от цели решаемой задачи, она может быть только в форме НМ, в частности, в большинстве случаев с табулированной ФП. Исходное множество данных содержит данные, реально зашумленные, скрывающие нужную информацию, в частности, пропуски данных, которых с точки зрения ТНМ не может быть в принципе. Обратим внимание, что НМ может представляться в виде, аналогичном блочному, ФП может быть другим НМ, ФП которого может быть также НМ и т.д. Например, рассматриваемое в работе [Piegat and Plucinski, 2015] НМ, использует стандартную (вертикальную) ФП и горизонтальную ФП, НМ представляется трехмерным объектом, однако даже в этом случае НМ может обрабатываться на уровне одномерной ФП.

Один из наиболее важных результатов хемометрики состоит в том, что использование многомерного подхода к моделированию неопределенности при планировании экспериментов и анализе их результатов позволяет достичь *существенного сокращения неопределенности* за счет увеличения количества переменных в единственном измерении (эксперименте). Весьма актуальным и значительным является проверка свойств эвристически сформированного НМ в предположении его многомерности.

Приводимые в работе авторами примеры показывают, что существует определенный диссонанс между семантикой НМ с ФП, назначенной на основе эвристик, и подмножеством упорядоченных пар (ПмУП), сформированным на основе многомерного (тензорного) подхода к неопределенности. В общем случае подмножество упорядоченных пар (ПмУП) является объективной моделью неопределенности, не уступающей НМ.

В работе [Нариньяни,2010] предпринята попытку дать философскую трактовку теории НЕ-факторов, в которой нечеткость – один из неограниченного множества НЕ-факторов. В этом плане показательной является работа [Хайтун,2013], в которой рассмотрена современная философская трактовка энтропии как меры беспорядка/сложности. Интерес к данной работе в контексте рассматриваемых проблем обусловлен тем, что энтропия в ТНМ также выступает как мера неопределенности, а введение ФП как *результата неявного знания* позволяет провести аналогии со многими выводами, сформулированными в этой работе.

Автор работы [Хайтун, 2013] отмечает, что беспорядок/сложность (обуславливающие в нашей трактовке неопределенность) - это в терминах теории измерений – *латентная* переменная, она непосредственно не наблюдаема, представляя собой не более чем представление субъекта измерения об измеряемом свойстве (назначение ФП). Непосредственно наблюдаемы (измеряемы) *индикаторы*, значения которых связывают со значениями латент специальные конструкции - *метрические модели*, общепринятой теории которых до сих пор не существует. Обратим внимание, что для НМ такими индикаторами являются дефадзифицированные значения $\tilde{x}$ и норма НМ, представленного как матрица $n\times 2$, $\tilde{x} = \begin{pmatrix} x & \mu^x \end{pmatrix}_1^n$.

В теории нечетких множеств неявное знание было использовано при постулировании факта, что раскрытие неопределенности не только возможно, но и рационально при помощи эвристически назначенной ФП. Однако здравый смысл и возможность человека решать задачи в условиях неопределенности, не прибегая к сложным формальным моделям, относится к области неявных знаний, энтропийный подход целиком может быть перенесен на неопределенность и связанную с ней ТНМ и ее главный индикатор – функцию принадлежности.

Постановка задач исследования

Психологическая *природа* человека, лежащая в основе здравого смысла, на основе которой формируется стандартная ФП, многогранна и сложна. Точно также сложна и многогранна природа неопределенности, а нечеткие множества – один из наиболее популярных способов ее представления. Многогранность природы неопределенности не позволяет в целом ряде случаев применять мощный аппарат ТНМ в силу того, что эвристическая ФП не может быть назначена.

Основной целью работы является необходимость показать на конкретных реальных примерах целесообразность и рациональность создания дополнительного канала формирования вектора, обладающего свойствами весовой функции (подобной ФП), но в отличие от последней, получаемой на основании формальных методов, т.е. явного знания.

Известно [Родионова, 2006], [Крон, 1978], что для моделирования сложных явлений наиболее подходит *тензор* (что убедительно показали психометрия, хемометрика и особенно работы Г.Крона), поэтому, учитывая, что ТНМ - одно из мощнейших средств решения задач в условиях неопределенности, следует безусловно рассмотреть альтернативные модели неопределенности, в частности, на основе тензорных моделей.

По мнению авторов данной работы такой математический объект, как тензор, не только наиболее подходит для моделирования феномена неопределенности, но и создает дополнительные возможности решения новых классов задач [Минаев, 2013]. Обратим внимание, что моделирование феномена нечеткости (смазывания или размывания) в задачах обработки сигналов эффективно выполняется при помощи специальных матриц, в частности, Теплицевой матрицей. Семантика понятия «тензор», которым обычно пользуются, например, в психометрии такова: тензором описывается некоторое свойство объекта (или сам объект), обычно настолько сложное, что требуется несколько характеристик. Неопределенность – сложное состояние объекта, представлять такое состояние только одним объектом – нечетким множеством, идентифицируемым по функции принадлежности, по-видимому, не всегда возможно.

Рассматривая неопределенность в предположении, что она задана в виде массива значений (например, НЕ-фактор «неточность»), можно наложить условие целостности в следующем виде: объект (массив данных), на основании которого сформирована модель, неопределенности НМ, должен *быть восстановлен* путем использования логико-математических операций над компонентами. Обратимся снова к НМ: в паре $\tilde{x}=\{x_k/\mu^k\}$, $x\in X$, $k=1,2,\ldots,K$; $\mu^k \rightarrow[0,1]$ действительное значение x_k с учетом его значимости равно $x_k \cdot\mu^k$. Следовательно, минимальное множество действительных значений, используемое при анализе неопределенности, на основании которого сформулировано данное утверждение, можно представить в виде $\{x_k\circ\mu^k\}$, где $\circ$– символ внешнего произведения, или $x_k \otimes(\mu^k)^T$, где $\otimes$ - символ Кронекерова (тензорного) произведения (КП) [Minaev, 2014].

Если считать объект $\tilde{x}=\{x_k/\mu^k\}$, $k=1,2,\ldots,K$; $\mu^k \rightarrow[0,1]$, назначенным на основе эвристик рациональным, то объекты $x_k\circ\mu^k$ или $x_k\otimes(\mu^k)^T$ в нотации ТНМ также могут считаться таковыми. Но эти объекты являются носителями скрытой информации, сознательное игнорирование их существования недопустимо.

Проведенный анализ современного состояния ТНМ позволил установить целесообразность исследования следующих проблем:

- выявление скрытых свойств (соответственно знаний) при представлении стандартного НМ $\tilde{x}=\{x_k \;/\; \mu_k^x\}$, $\mu_k^x \in [0,1]$, $x\in X$ в виде 2-D тензора при помощи Кронекерова произведения (КП) $\aleph = \left(x \otimes (\mu^x)^T \right)$ с последующей сингулярной декомпозицией (процедура SVD): исследование разложения $\aleph \approx \sum_{i=1}^{r} \sigma_i (\mathbf{x}_i \otimes {}^{\pi}\boldsymbol{\mu}_i^x)$, где $\mathbf{x}_i$ - вектор, компоненты которого принадлежат УМ; ${}^{\pi}\boldsymbol{\mu}_i^x$ - вектор –аналог ФП,($\forall j$) ${}^{\pi}\boldsymbol{\mu}_i^{x_j} \to$ [0, 1] , но получен в результате формальных процедур; результатом работы является установление факта, что нечеткое множество $\tilde{x}=\{x_k \;/\; \mu_k^x\}$ и подмножество упорядоченных пар ${}^{\pi}\tilde{\mathrm{x}} = \left(\mathbf{x}_1 \;\; {}^{\pi}\boldsymbol{\mu}_1^x \right)$ являются ближайшими в смысле Ф-нормы: $\left\| \tilde{\mathrm{x}} - {}^{\pi}\tilde{\mathrm{x}} \right\|_F \to min$, при этом ${}^{\pi}\tilde{\mathrm{x}}(:,2) = {}^{\pi}\boldsymbol{\mu}_1^x$ всегда для любого $\tilde{x}=\{x_k \;/\; \mu_k^x\}$ имеет сигмоидоподобную форму (рис. 1);

- определение подмножества упорядоченных пар: ПмУП ${}^{\pi}\tilde{\mathrm{x}} = \left(\mathbf{x}_1 \;\; {}^{\pi}\boldsymbol{\mu}_1^x \right)$ может быть получено, если тензорная декомпозиции применяется к специальным матрицам, например,Теплица, Ханкеля или их комбинациям, моделирующим неопределенность, если они сформированы на основании вектора (интервала) УМ;

- возможности использования формально сконструированных ПмУП в качестве альтернативных НМ; с этой целью сформированное ПмУП ${}^{\pi}\tilde{\mathrm{x}}$ сравнивается с НМ $\tilde{\mathrm{x}}$ с эвристически назначенной ФП на основании критериев – близость Ф-норм и дефадзифицированных значений: т.е. $\left\| {}^{\pi}\tilde{\mathrm{x}} \right\|_F \cong \left\| \tilde{\mathrm{x}} \right\|_F$, $\mathrm{def}({}^{\pi}\tilde{\mathrm{x}}) \approx \mathrm{def}(\tilde{\mathrm{x}})$, где def (·) – процедура дефадзификации НМ и оценивается адекватность реализации операций нечеткой математики над стандартно сформированными НМ и их формально вычисленными аналогами.

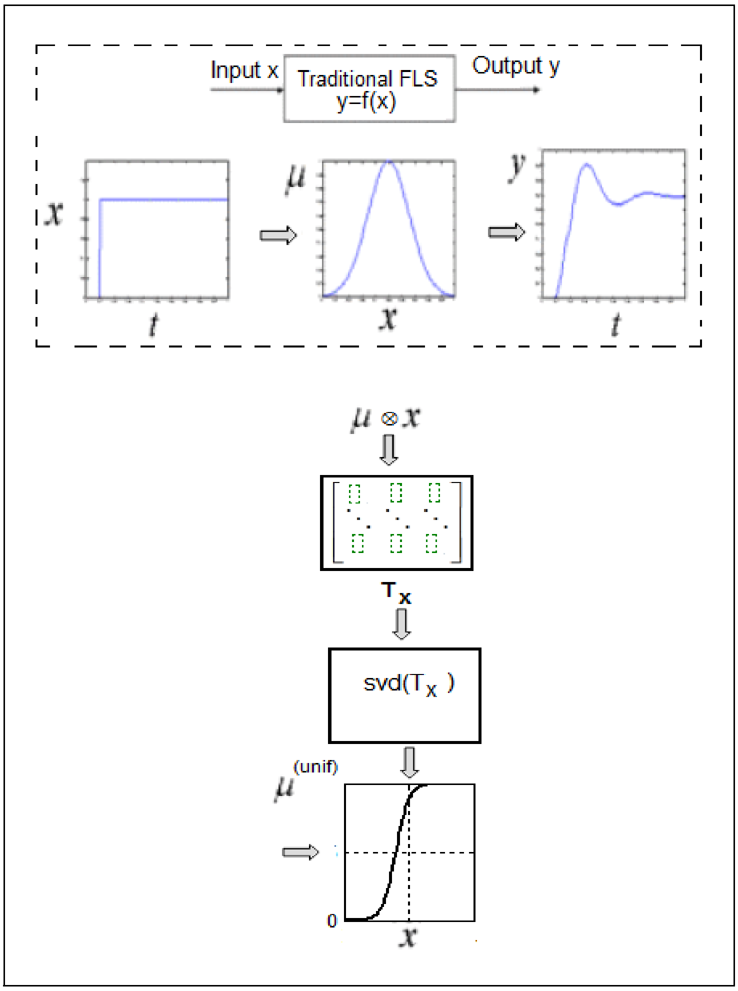


Рис.1. Формирование подмножества упорядоченных пар, ближайшего в смысле Ф-нормы к стандартному нечеткому множеству

Основные определения, математический аппарат тензорных декомпозиций

В работе сформулированы требования, которым должен удовлетворять математический аппарат принятия решений в условиях неопределенности на основе тензорных декомпозиций и обобщенный подход применения ПмУМ, который авторами в работе рассматривается в виде следующей схемы:

- неопределенность (многомерный масив) $\rightarrow$тензор $\rightarrow$ {совокупность ПмУП} $\rightarrow$ применение аппарата ТНМ к векторам – результату тензорной декомпозиции (rank-1 тензор);
- {совокупность ПмУП } должна асимптотически приближаться к исходному объекту – модели неопределенности.

Тензорные декомпозиции допускают различную интерпретацию. В данной работе рассмотрены наиболее актуальные декомпозиции, которые позволяют представить массив значений в виде совокупности векторов, что можно трактовать как ПмУП и применять аппарат ТНМ [Ghosh and Suryawanshi, 2014]. Цель тензорной декомпозиции - разложение на составные части или аппроксимация, когда точной декомпозиции тензора с точки зрения внешних произведений множества векторов не существует. Векторы в этих декомпозициях использованы как основание для нового представления исследуемого объекта. Обратим внимание, что здесь проблема точности не должна возникать, т.к. рассматривается объект в условиях неопределенности, кроме того, математический аппарат должен позволять значительно уменьшить вычислительные требования (особенно важно относительно объемов памяти).

Рассмотрим основной понятийный аппарат и основные определения ТНМ с учетом специфики рассматриваемых задач.

Нечеткое множество — это четкий универсум, на котором задана четкая характеристическая функция (ФП), принимающая значения на отрезке [0, 1] (а не только на двухэлементном множестве {0, 1}, что имеет место в случае четкого множества). Универсум -это четкое множество, на котором определено нечеткое. В общем случае НМ - это объект, предназначенный для моделирования другого объекта, информация о котором есть неполной, неточной, неоднозначной, противоречивой, некорректной, и может быть представлена в виде массива (многомерного) илиодномерного в большинстве реальных случаев. Отметим, что данное определение близко к определению тензора.

Важный вопрос определения универсума - его можно задать, только указав некоторое множество возможных значений объекта, например, статистические, спектральные, фрактальные или другие характеристики объекта. В определении универсального множества для НМ не учтено то обстоятельство, что множество значений универсума может обладать скрытой информацией.

Функция принадлежности (ФП- характеристическая функция) нечеткого множества $\tilde{A}$ - это четкая функция $\alpha=\mu_A(x)$, $U \to [0, 1]$, $x \to a$, отображающая каждый элемент четкого универсума U на четкое множество - отрезок [0,1], в соответствии с множеством $\tilde{A}$.

Множество принадлежностей ФП — это отрезок [0, 1] (а не двухэлементное множество {0, 1}, как в случае четких множеств). Другими словами, НМ $\tilde{A}$ — это подмножество упорядоченных пар $\langle U, \mu_A \rangle$ где U — универсум, μ_A — ФП, т. е. это подмножество декартового произведения универсума U и отрезка [0, 1]: $\tilde{A} \subset U \times [0,1]$. Учитывая, что НМ - это четкая (как правило) ФП, то проще всего НМ $\tilde{A}$ определить, указав его ФП μA и универсум U. При этом те элементы универсума, для которых ФП $\mu_A = 0$, данному НМ не принадлежат. Нечеткое множество присутствует только там, где его ФП $\mu_A > 0$. Значение ФП определяет эвристическую (основанную на экспертном мнении) степень нечеткости элемента НМ.

Фадзификация (введение нечеткости) — процесс построения НМ на основе исходного множества данных (измеренных или полученных каким либо др.способом в т.ч. и виртуально). Известно, что любая реальность принимается как совокупность отдельных объектов и отношений между ними. В простейшем случае объекты сформированы в виде массива, который можно представить в виде матрицы или «вытянув» эту матрицу по столбцам (процедура векторизации) в один ряд (вектор). Количественные характеристики общего признака, которым обладает ИМД, ложатся в основу формирования НМ, для этой цели часто используются статистические характеристики ИМД.

Если представить НМ в виде 2D тензора (матрицы) размерностью $n \times 2$, например,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_1\ \mu_1^A \\ \ddots \\ a_n\ \mu_n^A \end{pmatrix} \text{ и } \tilde{B} = \begin{pmatrix} b_1\ \mu_1^B \\ \ddots \\ b_n\ \mu_n^B \end{pmatrix},$$

то арифметическую операцию $*_f \in \{+, -, \times, /\}, \tilde{C} = \tilde{A} *_f \tilde{B}$ в нотации *MATLAB* представим в виде: $\tilde{C} = \tilde{A} *_f \tilde{B} = \left(\tilde{A}(:,1) *_f \tilde{B}(:,1), \min(\tilde{A}(:,2), \tilde{B}(:,2)) \right)$ на основании принцип нечеткого расширения.

Вводя понятие «тензор», следует учитывать, что оно имеет несколько определений: например, тензор – это объект, определяемый совокупностью коэффициентов $a_{ijk..m}$ полилинейной формы $\varphi=\varphi(x,y,z,\dots,w)$, записанной в некотором ортонормированном базисе [Акивис и Гольдберг, 2009]. В частности, совокупность коэффициентов a_{ij} билинейной формы $\varphi=\varphi(x,y)$, образующая матрицу **A**=[a_{ij}], представляет собой тензор. В данной работе авторами тензор рассматривается *d*-линейная форма или *d*-мерный массив [$a_{i1i2\dots id}$], который имеет:

- размерность (порядок) d = число индексов (измерений, мод, осей, направлений, путей);

- размер $n_1 \times \cdots \times n_d$ (число отсчетов по каждой оси).

Используемые *d*-тензоры можно записывать с помощью скелетных разложений обычных матриц. Весьма важным является то обстоятельство, что при сохранении общего количества элементов тензора эффективность его представления можно существенно повысить за счет увеличения числа измерений и уменьшения числа отсчетов по каждому измерению. “Экстремальный” случай – превращение вектора (интервала) размера $N = 2^d$ в *d*-тензор размеров $2\times 2\times \cdots \times 2$.

Известно [Оселедец, 2015], что при наличии некоторого функционала, неизвестный объект (или объект в условиях неопределенности) может быть проиндексирован *f*-индексами, причем *f*-индекс может быть введен либо естественным, либо искусственным образом. Это позволяет вектор длины 2^f преобразовывать в тензор $\underbrace{2\times 2\times 2\times \cdots \times 2}_{f}$, у которого будут малые ранги, даже если вектор состоит из значений одномерной функции, в частности, быть интервалом с подинтервалами. Одним из преимуществ концепции тензоров есть то, что их можно вводить искусственно, вводя виртуальные размерности в ИМД, получать в общем случае малоранговые разложения.

Классик тензорного анализа Г.Крон определяет тензор как объект, компонентами которого «… могут быть числа, функции, операторы и т.д. Единственным критерием тензора является его линейная форма преобразования относительно данной группы преобразований. … Тензорный характер не зависит от природы его компонент или от данной ему физической или геометрической интерпретации» [Крон,1978]. Тензор - многомерный массив, где порядок тензора обозначает размерность массива. Например, скаляр - просто порядка-0 тензор, вектор порядка -1, матрица порядка -2, и любой тензор, порядок которого равен 3 или больше, представлен как тензор высшего порядка. В данной работе внимание сосредоточено на тензоре порядка ≤ 3. Декомпозиция тензоров 3-го порядка связана с т.н. *модальными* операциями и рассматривается авторами в другой работе, в данном случае статье основное внимание сосредочено на стандартном SVD.

Рассмотрим сингулярную декомпозицию 2D-тензоров (матриц) с учетом характеристик, важных для прикладных исследований, используя работу [Van Loan, 2014].

Постановка задачи SVD: пусть задана матрица $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ и число k=min(m,n). Тогда существуют ортонормальные матрицы $\mathbf{U}=[\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_k] \in \mathbf{R}^{n\times k}$, $\mathbf{V}=[\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k] \in \mathbf{R}^{m\times k}$ такие, что $\mathbf{X}=\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T$, где Σ =diag($\sigma_1, \sigma_2,\ldots, \sigma_k$), $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_k$.

Выберем $r \leq k$ и разделение

$$\mathbf{X} = \left[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\right] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \left[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\right]^T = \underbrace{\mathbf{u}_1 \Sigma_1}_{R} \underbrace{\mathbf{v}_1^T}_{S^T} + \mathbf{u}_2 \Sigma_2 \mathbf{v}_2^T .$$

С учетом введенных обозначений имеем: $\left\| \mathbf{X} - RS^T \right\|_F = \left\| \Sigma_2 \right\|_F = \sigma_{r+1}$. Низкоранговые аппроксимации эффективны, если сингулярные величины убывают (разрушаются) достаточно быстро.

Span(**X**)≈ Span(R), Span($\mathbf{X}^T$)≈ Span(S^T) (span – диапазон)

Ф-норма матрицы **X:**

$$\|X\|_F = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |x_{ij}|^2 \right)^{1/2} = \left(\mathrm{trace}(X \cdot X^T) \right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{\min(m.n)} \sigma_i^2(X) \right)^{1/2}$$

, где trace(**X**) –след матрицы **X**, $\sigma_i^2(X)$ - сингулярные величины SVD-разложения матрицы **X.**

Приведем основные факты, касающиеся SVD, необходимые для понимания излагаемого материала, а также ряд определений (основная их часть изложена в [Charles F. Van Loan - 2014]:

- колонки $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n]$ и $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n]$ - это правый и левый сингулярный векторы, связанные соотношениями: $\mathbf{Av}_j = \sigma_j \mathbf{u}_j$, $\mathbf{A}^T \mathbf{u}_j = \sigma_j \mathbf{v}_j$, $j = 1, n$;

- SVD матрицы **A** связано с собственно-значными декомпозициями $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ и $\mathbf{AA}^T$ соотношениями:

$$\mathbf{V}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{A})\mathbf{V} = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, ..., \sigma_n^2), \ \mathbf{U}^T(\mathbf{AA}^T)\mathbf{U} = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, ..., \sigma_n^2, \underbrace{0, ..., 0}_{m-n});$$

- матрица $\sigma_1 u_1 v_1^T$ есть ближайшая к **A** rank-1 матрица, т.е. решение проблемы $\sigma_{min} = \min_{\mathrm{rank}(\mathbf{B})=1} \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|_F$.

- сумма квадратов элементов любого столбца матрицы **V** равна 1 (например, таблица 1).

Таблица 1. Пример сингулярной декомпозиции

X =					[U S V]=svd(X)		
					U(:,1) =	diag(S) =	V (:,1)=
3.52	0.99	2.29	4.68	2.76	-0.44	15.47	-0.57
0.88	2.84	0.79	2.57	5.24	-0.34	4.94	-0.19
5.70	2.08	0.86	1.03	0.91	-0.32	3.55	-0.32
4.45	1.79	2.29	2.20	2.65	-0.40	1.24	-0.52
5.24	0.24	3.82	5.87	5.52	-0.66	0.65	-0.52

v(:,1)'=[-0.57 -0.19 -0.32 -0.52 -0.52], sum(v(:,1).^2)= 1.00;
sum(v(:,2).^2)= 1.00;
..
sum(v(:,5).^2)= 1.00;

Утверждение. Пусть задано ПмУП **P**$=[\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\ \mathbf{y}^{\mathrm{T}}], \mathbf{x}\in\mathbb{R}^{n}, y\to[0,1], \mathrm{y}\in\mathbf{y}$ (или любое НМ , с ФП, сформированной эвристически); сформируем 2D-матрицу $\mathbf{T}_{xy}$ = $=[\mathbf{x}\otimes\mathbf{y}^{\mathrm{T}}]$, где $\otimes$ – символ Кронекерова произведения, и выполним сингулярную декомпозицию $\mathbf{T}_{xy}\to[u\ \ s\ \ v]$ =svd($\boldsymbol{T}_{xy}$). Объект, вычисленный в виде

Tab_pup_tx=*sort*([abs(*u*(:,1)***s*(1,1))*max(abs(*v*(:,1))), abs(*v*(:,1))/max(abs(*v*(:,1)))]),

представляет собой подмножество упорядоченных пар (группоид[**]) и обладает следующим свойством: ПмУП **P** и *Tab_pup_tx* близки по Ф-

[**] Напомним, что группоид – это упорядоченная пара, состоящая из множества E и внутреннего закона композиции *, определенного на этом множестве всюду, обозначаемая как (E, *)

норме и дефадзифицированному значению, вычисленному по методу ЦТ, т.е:

$$\|P\|_F \cong \|Tab\_pup\_tx\|_F, \mathrm{defuzz}(P) \cong \mathrm{defuzz}(Tab\_pup\_tx).$$

Реализация предложенных методов и алгоритмов определения ПмУП

Пример. Рассматривается: нечеткое множество xy=[x' y'], где x=[3:3/4:9]; y=trimf(x, [3 6 9], НМ моделирует нечеткое высказывание ⟨*примерно 6*⟩.

1.Вычислим Ф-норму и дефадзифицированное значение НМ xy:имеем n_xy =norm(xy,'fro'), s_xy=sum(xy(:,1).*xy(:,2))/sum(xy(:,2)), соответственно; n_xy = 18.99, s_xy = 6.0; сформируем Кронекерово произведение векторов (x,y): tx=kron(x,y').

Результаты вычисления tx=kron(x,y').

tx =

0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.75	0.94	1.13	1.31	1.50	1.69	1.88	2.06	2.25
1.50	1.88	2.25	2.63	3.00	3.38	3.75	4.13	4.50
2.25	2.81	3.38	3.94	4.50	5.06	5.63	6.19	6.75
3.00	3.75	4.50	5.25	6.00	6.75	7.50	8.25	9.00
2.25	2.81	3.38	3.94	4.50	5.06	5.63	6.19	6.75
1.50	1.88	2.25	2.63	3.00	3.38	3.75	4.13	4.50
0.75	0.94	1.13	1.31	1.50	1.69	1.88	2.06	2.25
0	0	0	0	0	0	0	0	0

2.Выполним сингулярную декомпозицию tx, рассмотрев 2 случая:

а) [u s v]=svd(tx') и б) [u s v]=svd(tx),

здесь ′ - символ транспонирования матрицы.

3.Сформируем объект - ПмУП Tab_pup_tx

```
Tab_pup_tx=sort([abs(u(:,1)*s(1,1))*max(abs(v(:,1))),abs(v(:,1))/max(abs(v(:,1)))]);
```

4.Вычислим Ф-норму объекта Tab_pup_tx - n_pmup=norm(Tab_pup_tx,'fro') =18.99.

5.Вычислим дефадзифицированные значение ПмУП из п.3

s_pup_tx=[sum(Tab_pup_tx(:,1).* Tab_pup_tx(:,2))/sum(Tab_pup_tx(:,2))] * k_{tr}= 6.02,

где k_{tr} –нормировочный коэффициент, k_{tr} =1/[1.21÷1.23]

Вычисленные величины сведены в табл.2

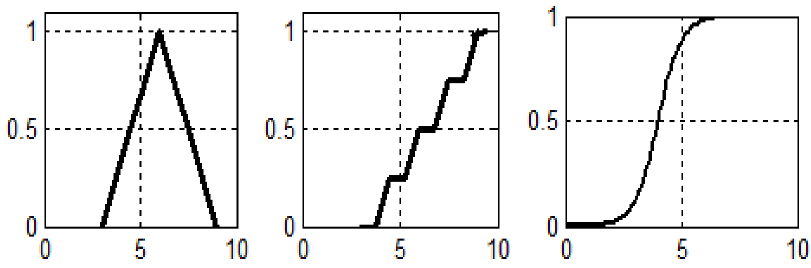
Таблица 2. Ф-нормы и дефадзифицированные значения

Ф-нормы			Дефадзифицированные значения		
НМ	Tab_pup_tx		НМ	Tab_pup_tx	
18.99	а	б	6.00	а	б
	18.99	15.07		6.02	4.94

Анализ полученных результатов показывает, что нечетко-множественная интерпретация сингулярной декомпозиции 2-D тензора корректна. Ф-норма ПмУП, $НМ_{trimf}$ и дефадзифицированные значения практически совпадают, т.е. объекты НМ со стандартной ФП и ПмУП – разложение тензорного произведения компонент НМ, близки. Транспонирование матрицы, не является рассчетным, т.к. ПмУП и $НМ_{trimf}$ не являются близкими в смысле Ф-нормы, дефадзифицированные значения различны. На рис. 2

представлено стандартное НМ с треугольной ФП, ближайшее (в смысле Ф-нормы ПмУП) и возможная аппроксимация ПмУП сигмоидной кривой.

Обратим внимание, что ПмУП представлено в виде аналогичном НМ, операции нечеткой математики и логики могут выполняться аналогично соответствующим операциям над НМ с сопоставимым результатом. Важным преимуществом ПмУП является его унифицированный вид.



г		д	
3.00	0	3.00	0
3.75	0.25	3.75	0
4.50	0.50	4.50	0.25
5.25	0.75	5.25	0.25
6.00	1.00	6.00	0.50
6.75	0.75	6.75	0.50
7.50	0.50	7.50	0.75
8.25	0.25	8.25	0.75
9.00	0	9.00	1.00
18.99	6.00	18.99	5.88

а б в г д

Рис. 2. а, г – НМ$_{trimf}$ ⟨примерно 6⟩; б,д – ближайшее (в смысле Ф-нормы) ПмУП, вычисленное в результате сингулярной декомпозиции Кронекерова (тензорного) произведения компонент НМ$_{trimf}$, в – возможная (сигмоидная) аппроксимация ПмУП (в колонке “д” приведено нормированное дефадзифицированное значение)

Рассмотрим возможность прикладного использования представленных результатов исследования. Один из важных результатов - унифицированное множество в тензорном формате содержит скрытую информацию, которая может быть использована при принятии решения не менее эффективно, чем эвристически назначенная ФП. Кроме того, наличие формально вычисленного ПмУП может служить убедительным сравнительным примером. Теплицевы матрицы (ТМ) впервые были применены в приложениях, связанных с обработкой сигналов и изображений [Nagy,1998] как способ моделирования феномена нечеткости в виде суммы Кронекер-произведений с применением стандартных процедур SVD. Линейная дискретная модель сохранения изображения – это вектор-матричное уравнение: **g**=**Hf** + η, где **g**– наблюдаемое изображение, **f** - идеальное изображение, η- аддитивный шум, **H** - матрица, представляющая феномен *смазывания* (*нечеткости* изображения). В качестве матрицы **H** используют специальные (Теплицевы, Ганкелевы или др.) [Gray, 2006] матрицы. Если УМ имеет вид *x*=[1 2 3 4], то Т-матрица, построенная на векторе *x,* в нотации MATLAB представлена следующим образом:

$$\mathrm{toeplitz}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

если предположить, что 3-й элемент УМ является предпочтительным, то Т-матрица приобретает вид

$$\mathrm{toeplitz}(x(x_3)) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим пример вычисления альтернативного ПмУП для НМ xy=[x' y'], где x= [3:3/4:9]; y=trimf(x, [3 6 9], НМ моделирует нечеткое высказывание ⟨*примерно 6*⟩, предполагая, что ФП не может быть назначена. Вектор УМ задается следующим образом:

x=(0:9/8:9)'= [3.00 3.75 4.50 5.25 $\underbrace{6.00}_{x(5)}$ 6.75 7.50 8.25 9.00]

Выполним размывание вектора УМ. Из его представления ⟨*примерно 6*⟩ соответствует 5-му элементу УМ. Таким образом, Т-матрица с выбором главной диагонали должна иметь на главной диагонали величину $\underbrace{6.00}_{x(5)}$. Т-матрицы представлены ниже.

Результаты вычисления Т-матрицы

tx=

6.00	5.25	4.50	3.75	3.00	0	0	0	0
6.75	6.00	5.25	4.50.	3.75	3.00	0	0	0
7.50	6.75	6.00	5.25	4.50.	3.75	3.00	0	0
8.25	7.50	6.75	6.00	5.25	4.50.	3.75	3.00	0
9.00	8.25	7.50	6.75	6.00	5.25	4.50.	3.75	3.00
0	9.00	8.25	7.50	6.75	6.00	5.25	4.50.	3.75
0	0	9.00	8.25	7.50	6.75	6.00	5.25	4.50.
0	0	0	9.00	8.25	7.50	6.75	6.00	5.25
0	0	0	0	9.00	8.25	7.50	6.75	6.00

tx1=

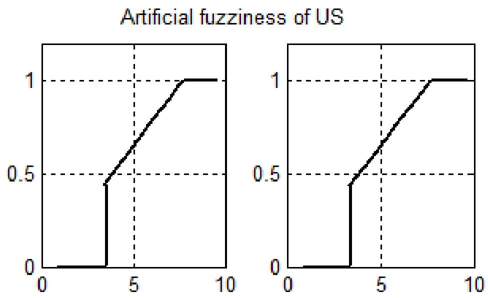
6.00	6.75	7.50	8.25	9.00	0	0	0	0
5.25	6.00	6.75	7.50	8.25	9.00	0	0	0
4.50	5.25	6.00	6.75	7.50	8.25	9.00	0	0
3.75	4.50	5.25	6.00	6.75	7.50	8.25	9.00	0
3.00	3.75	4.50	5.25	6.00	6.75	7.50	8.25	9.00
0	3.00	3.75	4.50	5.25	6.00	6.75	7.50	8.25
0	0	3.00	3.75	4.50	5.25	6.00	6.75	7.50
0	0	0	3.00	3.75	4.50	5.25	6.00	6.75
0	0	0	0	3.00	3.75	4.50	5.25	6.00

Сингулярная декомпозиция позволяет вычислить ПмУП путем реализации алгоритма.Фрагмент реализации алгоритма вычисления ПмУП на основе сингулярной декомпозиции представлен в нотации MATLAB:

```
x=[3:3/4:9]';
disp('**********Тепліц-матриця - створення розмитого середовища 1*******')
        [u s v]=svd(tx);
disp('Сингулярна декомпозиція tx ')
% [u    s    v];
disp('П/множина впорядкованих пар розмитої універсальної множини ')
fs=sort([abs(u(:,1)*s(1,1))*max(abs(v(:,1))), abs(v(:,1))/max(abs(v(:,1)))])
disp('НОРМА  та  Дефадзифіковане значення ПмВП ')
[ norm(fs,'fro') sum(fs(:,1).*fs(:,2))/sum(fs(:,2))]
subplot(121)
h=plot(fs(:,1),fs(:,2),'k')
set(h,'LineWidth',2)
grid on
title('Artificial fuzziness of US')
axis([0 10 0 1.2])


disp('**********Тепліц-матриця - створення розмитого середовища  2*******')
         [u s v]=svd(tx1);
disp('Сингулярна декомпозиція tx ')
% [u    s    v];
disp('П/множина впорядкованих пар розмитої універсальної множини ')
fs=sort([abs(u(:,1)*s(1,1))*max(abs(v(:,1))), abs(v(:,1))/max(abs(v(:,1)))])
disp('НОРМА  та  Дефадзифіковане значення ПмВП ')
[ norm(fs,'fro') sum(fs(:,1).*fs(:,2))/sum(fs(:,2))]
subplot(122)
h=plot(fs(:,1),fs(:,2),'k')
set(h,'LineWidth',2)
grid on
title('Artificial fuzziness of US')
axis([0 10 0 1.2])
```

Результаты вычислений приведены на рис.3



fs =

3.37	0.44
4.41	0.57
5.01	0.65
5.49	0.71
6.10	0.79
6.59	0.86
6.94	0.90
7.49	0.97
7.70	1.00

а б

Ф-норма и дефадзифицированное значение

18.32 6.22

Рис. 3. ПмУП, вычисленные на основе сингулярной декомпозиции размытого УМ в виде Т-матриц (tx и tx1 - а и б соответственно)

Анализ полученных числовых характеристик НМ со стандартной ФП, сформулированной эвристически, практически совпадает с ПмУП, которое является ближайшим к нему в смысле Ф-нормы.

Рассмотрим арифметические операции над ПмУП, вычисленными в результате сингулярной декомпозиции Теплицевых матриц, сформированных путем размывания УМ - имитация (моделирование) состояния, когда назначение эвристических ФП ограничено или невозможно.

Пусть НМ $\tilde{a} \triangleq \{a/\mu^a\}, \mu^a \to [0,1], a \in A; \tilde{b} \triangleq \{b/\mu^b\}, \mu^b \to [0,1], b \in B$ представлены в виде матриц

$$\mathbf{T}^a = \begin{pmatrix} a_1 \ \mu^{a_1} \\ \vdots \\ a_n \ \mu^{a_n} \end{pmatrix}, \ \mathbf{T}^b = \begin{pmatrix} b_1 \ \mu^{b_1} \\ \vdots \\ b_n \ \mu^{b_n} \end{pmatrix},$$

размерностью $n \times 2$, где n –количество строк (α- уровней). Результат операции $\tilde{c} = \tilde{a} *_f \tilde{b}$, где $*_f \in \{+,-,*,/\}$, в соответствии с принципом нечеткого расширения вычисляется как:

$$\tilde{c} \Rightarrow \mathbf{T}^c = \left(\mathbf{T}^a(:,1) *_f \mathbf{T}^b(:,1) \quad , min\left(\mathbf{T}^a(:,2), \mathbf{T}^b(:,2)\right) \right).$$

Сравним результатов арифметической операции для НМ ($\tilde{y}2 = \tilde{5}_{trapmf}$)+($\tilde{y}3 = \tilde{5}_{trimf}$) и ПмУП$_{y2}$+ ПмУП$_{y3}$, вычисленных на основании SVD–декомпозиций Теплицевых матриц , сформированных на $\mathbf{T}^a$ (:,1) и $\mathbf{T}^b$ (:,1) с выбором в качестве главной диагонали элементов, соответствующих $\langle$*примерно* $\tilde{5}_{trapmf}$ $\rangle$ и $\langle$*примерно* $\tilde{5}_{trimf}$ $\rangle$. Высказывания $\langle$*примерно* $\tilde{5}_{trapmf}$ $\rangle$и $\langle$*примерно* $\tilde{5}_{trimf}$ $\rangle$, их сумма представлены в виде НМ в табл.3

Таблица. 3. Представление высказываний

$\tilde{y}2 = \tilde{5}_{trapmf}$	$\tilde{y}3 = \tilde{5}_{trimf}$	$\tilde{y}2 + \tilde{y}3$
$\begin{pmatrix} 3.00 & 0 \\ 4.25 & 1.00 \\ 5.50 & 1.00 \\ 6.75 & 0.63 \\ 8.00 & 0 \end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix} 2.00 & 0 \\ 3.50 & 0.50 \\ 5.00 & 1.00 \\ 6.50 & 0.50 \\ 8.00 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5.00 & 0 \\ 7.75 & 0.50 \\ 10.50 & 0.83 \\ 13.25 & 0.42 \\ 16.00 & 0 \end{pmatrix}$
Ф-нормы и дефадзифицированные значения		
12.99 5.18	12.21 5.00	25.06 10.37

Соответствующие Теплицевы матрицы сформированы по правилу – элементом главной диагонали является элемент x_3 УМ, $x_3 \in X=\{x_i\}$, i=1,5;

$$\begin{pmatrix} x_3 & x_2 & x_1 & 0 & 0 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 & 0 \\ x_5 & x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \\ 0 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 0 & x_5 & x_4 & x_3 \end{pmatrix},$$

в соответствии с которым Т-матрицы для УМ НМ $\tilde{5}_{trapmf}$ - x=[3:5/4:8]и $\tilde{5}_{trimf}$ - x=[2:6/4:8], обозначенные как tx1 и tx2, приобретают соответственно вид:

Таблица 4. Т-матрицы для УМ НМ

tx1 =				
5.50	4.25	3.00	0	0
6.75	5.50	4.25	3.00	0
8.00	6.75	5.50	4.25	3.00
0	8.00	6.75	5.50	4.25
0	0	8.00	6.75	5.50

tx2 =				
5.00	3.50	2.00	0	0
6.50	5.00	3.50	2.00	0
8.00	6.50	5.00	3.50	2.00
0	8.00	6.50	5.00	3.50
0	0	8.00	6.50	5.00

Фрагмент кода вычисления ПмУП на основании процедуры сингулярной декомпозиции:

```
[u s v]=svd(tx1 или tx2);
disp('Сингулярна декомпозиція НМ №1 ')
% [u    s    v];
disp('П/множина впорядкованих пар ')
Tab_pup_x=sort([abs(u(:,1)*s(1,1))*max(abs(v(:,1))),
abs(v(:,1))/max(abs(v(:,1)))]);
disp('НОРМА  та  Дефадзифіковане значення ПмВП ')
```

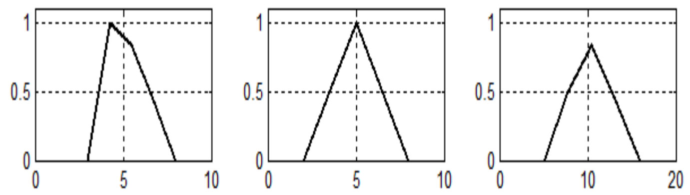
```
[norm(Tab_pup_x,'fro')
sum(Tab_pup_x(:,1).*Tab_pup_x(:,2))/sum(Tab_pup_x(:,2))]
Tab_pup_x_1=Tab_pup_x
```

Альтернативные подмножества упорядоченных пар соответственно обозначены как Tab_pup_x_1 (tx1) и Tab_pup_x_2 (tx2), их сумма - rez, результаты вычисления приведены в таблице 5.

Таблица 5. Альтернативные подмножества упорядоченных пар УМ

Tab_pup_x_1 (tx1)=		Tab_pup_x_1 (tx2) =		rez=	
3.44	0.49	2.87	0.44	6.32	0.44
4.99	0.71	4.62	0.71	9.61	0.71
5.20	0.74	4.76	0.73	9.95	0.73
6.45	0.92	6.14	0.94	12.59	0.92
7.00	1.00	6.53	1.00	13.53	1.00
Ф-нормы и дефадзифицированные значения					
12.55	5.70	11.65	5.32	24.00	11.05

Сравнивая соответствующие таблицы для НМ и ПмУП, можно констатировать, что эквивалентность приведенных операций очевидна. Аналогичные результаты были получены при реализации всех арифметических операций, объем статьи не позволяет привести их полностью. Визуализация полученных результатов приведена на рис.4, рис.5.



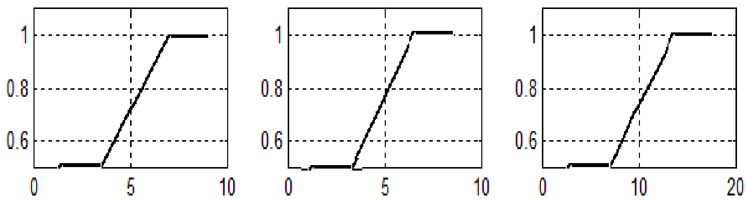
а б в

Ф-нормы и дефадзифицированные значения		
12.99 5.18	12.21 5.00	25.06 10.37

НМ ⟨*примерно* $\tilde{5}_{trapmf}$ ⟩ и⟨*примерно* $\tilde{5}_{trimf}$ ⟩ и их сумма:

а- $\tilde{y}2 = \tilde{5}_{trapmf}$, б - $\tilde{y}3 = \tilde{5}_{trimf}$, в - $\tilde{y}2 + \tilde{y}3$

Рис. 4 Ф-нормы и дефадзифицированные значения



а б в

Ф-нормы и дефадзифицированные значения		
12.55 5.70	11.65 5.32	24.00 11.05

Рис. 5. Вычисление ПмУП. а, б - ПмУП, вычисленные на основании размывания интервалов УМ НМ ⟨*примерно* $\tilde{5}_{trapmf}$ ⟩ и⟨*примерно* $\tilde{5}_{trimf}$ ⟩ и их сумма: а- $\tilde{y}2 = \tilde{5}_{trapmf}$, б - $\tilde{y}3 = \tilde{5}_{trimf}$, в - $\tilde{y}2 + \tilde{y}3$

Обратим внимание на то, что результаты, связанные с ПмУП, были получены только на основании информации сингулярных декомпозиций размытых (при помощи Теплицевой матрицы) значений УМ, без использования собственно ФП.

Таким образом, существует возможность параллельного назначения ПмУП, в значительной мере свободного от недостатков, присущих ФП, т.к. процедура формирования ПмУП, во-первых, в значительной степени формализована, во-вторых, позволяет выявить скрытые знания, содержащиеся в ИМД, на основе тензорных декомпозиций. Параллельное использование НМ, сформированного эвристически, и ПмУП, сформированного практически формальными методами, позволяет существенно повысить эффективность решения задач в условиях неопределенности.

Объем статьи не позволил привести результаты моделирования интервальной неопределенности (в данном случае универсального множества, на котором формируется НМ) при помощи *блочных* Теплицевых и Ганкелевых матриц, Теплицево+Ганкелевых и др. Во всех случаях имеет место подтверждение концепции, что в условиях невозможности задания по тем или иным причинам ФП моделирование феномена размытия интервала значений (УМ) при помощи специальных матриц может служить эффективным инструментом решения разнообразных задач в условиях неопределенности. Процедура принятия решения, принятая в настоящее время в теории НМ, может быть эффективно дополнена методологией Д.Канемана и А.Тверски, основанной на использовании аномалий рационального поведения [[Канеман.,Тверски, 2003]], где обязательно предусматривается возможность сравнения.

Выводы

1. Предложена концепция альтернативных аналогов нечетких множеств - унифицированное подмножество упорядоченных пар, формируемое на основе сингулярной декомпозиции специальной матрицы (Теплица, Ханкеля), моделирующей процедуры размывания интервала

универсального множества. Предложенное подмножество упорядоченных пар обладает следующими премуществами:

- использование УП в условиях ограничений (или исключения) экспертного назначения функции принадлежности;
- возможность сравнительной оценки с результатами, полученными стандартными методами ТНМ;
- объективность формирования подмножества упорядоченных пар позволяет повысить эффективность принимаемых решений.

2. Альтернативные подмножеств упорядоченных пар сформированы единообразно, полученные Ф-нормы и дефадзифицированные значения, на основании которых сравниваются нечеткие множества и альтернативные подмножества упорядоченных пар (в случаях применения трапециевидных, треугольных или Гауссовых функций принадлежности), достаточно близки или практически совпадают.

3. Практическая реализация предложенного подхода позволяет решать важные прикладные задачи. Числовые оценки в условиях неопределенности весьма сомнительны, однако проведенные многочисленные вычислительные эксперименты, результаты которых частично приведены в статье, показали высокую эффективность применения подмножеств упорядоченных пар в аналитике трафика компьютерных сетей, в частности, идентификации аномалий трафика.

4. Подмножество упорядоченных пар, формируемое на основе тензорных декомпозиций, открывает новые возможности в аналитике Больших Данных, повышении эффективности использования НМ-2 типа и мультинечетких множеств.

Благодарности

Статья частично финансирована из проекта ITHEA XXI Института Информационных теорий и Приложений FOI ITHEA и консорциума FOI Bulgaria (www.ithea.org)

Литература

[Albrecht, 2007] Albrecht K. Practical Intelligence: The Art and Science of Common Sense, p. 41, (2007)

[Atanassov,1986] Atanassov, K., Intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems, 20:87–96, 1986.

[Atanassov,1989] Atanassov, K., More on intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems, 33:37–46, 1989.

[Dug Hun Hong, 2001] Dug Hun Hong. On Solving Fuzzy Equation. Korean J. Comput. & Appl. Math. Vol. 8(2001), No. 1, pp. 213 – 223

[Ghosh and Suryawanshi, 2014] Ghosh D. and Suryawanshi A. Approximation of Spatio-Tem-poral Random Processes Using Tensor Decomposition. Commun. Comput. Phys. Vol. 16, No. 1, pp. 75-95. July 2014.

[Gray, 2006] R. M. Gray. Toeplitz and Circulant Matrices: A review. Deptartment of Electrical Engineering Stanford University Stanford 94305, USA.-2006.- 94 p

[Kahneman and Tversky, 1979] Kahneman D., Tversky A. Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk // Econometrica. 1979. Vol. 47, No 2. P. 263-292.

[Kahneman and Tversky, 1992] Tversky A., Kahneman D. Advances in Prospect Theory: Cumulative Representation of Uncertainty // Journal of Risk and Uncertainty. 1992. Vol. 5, No 4. P. 297-323

[Merriam-Webster, 2008] Интернет-ресурс: http://www.Merriam-Webster.com/dictionary/com-mon+sense

[Minaev 2014] Yu.N. Minaev, O.Yu. Filimonova, J.I. Minaeva. KRONECKER (TENSOR) MODELS OF FUZZY-SET GRANULES. Cybernetics And Systems Analysis. International Theoretical Science Journal. Volume 50, № 4, 2014

[Nagy,1998] Nagy J.G. Decompositions of block Toeplitz matrices into a sum of Kronecker products with applications in image restoration. / Linear Algebra and its applications 284 (1998) 177-192.

[Piegat and Plucinski , 2015] A. Piegat and M Plucinski. Fuzzy Number Addition with the Application of Hori-zontal Membership Functions (Research Article). Hindawi Publishing Corporation. Scientific World Journal, Volume 2015, Article ID 367214.-16 p.http://dx. doi.org/ 10.1155/2015/367214.

[Zhang and Ding, 2013] H. Zhang, F. Ding. Research Article.On the Kronecker Products and Their Applications. Hindawi Publishing Corporation. Journal of Applied Mathe-matics.Vol. 2013, - 8 p.

[Zimmermann ,2001] Zimmermann H.-J. Fuzzy set theory and its applieations. -4th ed. – Kluwer Acad. Pub. 2001. – 525 pp.

[Van Loan, 2005] Approximations Block Matrix Computations and the Singular Value Decomposition. A Tale of Two Ideas. Charles F. Van Loan. Department of Computer Science. Cornell University Supported in part by the NSF contract CCR-9901988. Интернет-ресурс: web.mit.edu/ehliu/ Public/ProjectX/Summer2005/block%20matrix%20algorithms.pdf

[Wierman,1998] M.J.Wierman. An Introduction to the Mathematics of Uncertainty including Set Theory, Logic, Probability, Fuzzy Sets, Rough Sets, and Evidence Theory. -2010. – 339 p. Інтернет-ресурс: fuzzy. Creighton.edu/download/MOU.pdf. - 19. 04. 2019.

[Акивис и Гольдберг , 1972] Акивис М.А., Гольдберг В.В. Тензорное исчисление. М.: Изд-во «Наука», Главн. ред. физ.-мат. лит-ры, 1972. - 352 с.

[Андрианов, 2009] Андрианов И.В., Баранцев Р.Г., Маневич Л.И. Асимптотическая математика и синергетика: Путь к целостной простоте. М.: ЛИБРОКОМ, 2009.- 304 с.

[Воробьев ,2014] Воробьев О.Ю. Эвентология – очеловеченная математика. Ин-т вычислит.моделир.СО РАН/Краснояр. гос. ун-та . Интернет-ресурс: http://eventology-theory. ru/000. htm #text0

[Канеман.,Тверски, 2003] Канеман Д.,Тверски А. Рациональный выбор, ценности и фреймы // Психологический журнал. – 2003. – Т. 24. - № 4. - С. 31-42

[Кофман ,1982] Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств: Пер. с франц.-М.:Ра-дио и связь, 1982.- 432 с.

[Крон,1978] Крон Г. Тензорный анализ сетей. Пер.с англ./Под. Ред.Л.Т.Кузина, П.Г.Кузне-цова.- М.: Сов.Радио, 1978. - 720 с

[Круглый стол, 2001] Нужны ли функции принадлежности в будущей теории нечетких мно-жеств? Участники: А.Н.Аверкин, А.Ф.Блишун, Д.А.Поспелов, В.Б.Тарасов. НОВОСТИ ИИ. – 2001. – №2-3.

[Минаев, 2013] Ю.Н. Минаев, О.Ю. Филимонова, Ю.И. Минаева. Тензорные модели НМ-гранул и их применение для решения задач нечеткой арифметики. // Искусственный интеллект. —2013. — № 2. — С. 22–31.

[Нариньяни, 2008] Нариньяни А.С. История вычислительной техники за рубежом. Инженерия знаний и НЕ-факторы: краткий обзор. Интернет-ресурс: www.computer-museum.ru/ frgnhist/ ne-faktor.htm

[Нариньяни,2008] Нариньяни А.С. Инженерия знаний и НЕ-факторы: краткий обзор. Интернет-ресурс: www.computer-museum.ru/ frgn-hist/ne-faktor.htm4 лип. 2008 г.

[Нариньяни, 2010] Нариньяни А.С. Математика XXI – радикальная смена парадигмы. Модель, а не Алгоритм.- Сайт «Вопросы философии». Интернет-ресурс: http://vphil.ru/ index.php? option =com_content&task= =view&id=255&Itemid=52

[Оселедець, 2009] Оселедець И.В. Вычислительные тензорные методы и их применения. Автореф. диссерт. на соиск.уч. степ. д-ра физ.-мат.наук по спец. 01.01.07 - Вычисл. матем. -М.: Ин-т вычисл.матем. РАН.- 25 с.

[Павлов, 2007] Павлов И. А. Поведенческая экономическая теория - позитивный подход к исследованию человеческого поведения (научный доклад). - М., ИЭ РАН, 2007. - 62 с

[Пойа,1975] Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. Пер. с англ. - 2-е изд. испр. — М.: Глав. ред. физ-мат. лит., 1975. – 464 с. Книга в 2-х томах.Т. 1-Индукция и аналогия в математике.Т. 2-Схемы правдоподобных умозаключений

[Родионова, 2006] Родионова О.Е. Хемометрический подход к исследованию больших массивов хим. данных. Рос. хим. ж., 2006, т. L, №2. - с.128-145

[Тарасов, 2006] Тарасов В.Б.Теория нечетких множеств: новый виток развития. Интел-лектуальные системы и технологии. Научная сессия МИФИ-2006. Том 3. В кн.: Научная сессия МИФИ-2006. Сборник научных трудов. В 16 томах. Т.3. М.: МИФИ, ... tekhn-?sfera.com/ modeli-metody-i-programmnye-sredstva-v.

[Турксен,2001] Турксен И.Б. О вкладе Лотфи Заде с современную науку и научное мировоззре-ние. Пер с англ. В.Б.Тарасова. Новости Искусственного Интеллекта, №2-3, 2001, с. 12-15.

[Хайтун,2013] Хайтун С.Д. Трактовка энтропии как меры беспорядка и ее воздействие на современную научную картину мира. Сайт «Вопросы философии». Интернет-ресурс: http://vphil. ru/ index.php?option= com_ content&task=view&id=709.

[Ягер,1986] Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения: Пер. с англ/Под ред. Р. Р. Ягера. – М.: Радио и связь,1986.- 408 с.

Сведения об авторах

Юрий Н.Минаев *– профессор, доктор техн.наук, профессор кафедры компьютерных систем и сетей Национального авиационного университета, пр-кт космоната Комарова, 1, Киев-57, Украина,*

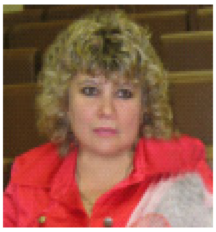
e-mail*: min_14@ukr.net.*

Научные интересы*: искусственный интеллект, управление в условиях неопределенности, трафик компьютерных систем, тензорный анализ, проблемы больших данных*

Николай Н.Гузий *- канд техн.наук, профессор кафедры компьютерных систем и сетей Национального авиационного университета, пр-кт космоната Комарова, 1, Киев-57, Украина,*

e-mail*: nn05@ukr.net.*

Научные интересы*: искусственный интеллект, управление в условиях неопределенности*



Оксана Ю. Филимонова *– канд. техн.наук, доцент кафедры основ информатики Киевского Национального университета строительства и архитектуры, Воздухофлотский пр-кт,03031 Киев, Украина,*

e-mail*: filimonova@nm.ru.*

Научные интересы*: искусственный интеллект, управление в условиях неопределенности, базы данных*

Юлия И. Минаева *- канд техн.наук, доцент кафедры Информационных технологий Национального университета им.Т.Шевченко, 01601, Киев, ул. Владимирская, 64, Украина,*

e-mail*: juil_2010@ukr.net.*

Научные интересы*: искусственный интеллект, управление в условиях неопределенности, базы данных, нейрокомпьютинг, тензорный анализ*

ALTERNATIVE METHODS OF ANALYSIS AND DECISION-MAKING IN UNCERTAINTY CONDITIONS BASED ON TENSOR DECOMPOSITIONS

Yuri N.Minaev, Mykola Guzii, Oksana Yu. Filimonova, Julia I. Minaeva

Abstract. *The problem of solving decision-making problems in conditions of uncertainty is considered using the methods and models of the theory of fuzzy sets with limited capabilities for assigning membership functions. It is shown that a subset of ordered pairs can be formed, in which one of the components is similar to the membership function, by tensorizing the universal set with subsequent singular decomposition. As one of the methods for tensorizing and accounting for the phenomenon, it was proposed to use the Toeplitz matrix with the choice of the main diagonal, which most effectively simulates the fuzziness. The universal set, on which a fuzzy set is formed, in the tensor format contains hidden information that can be used to make a decision no less efficiently than a heuristically designated membership function. Examples are given that show a higher efficiency of using a subset of ordered pairs in solving real problems under uncertainty.*

Keywords: *decision making, uncertainty conditions, fuzzy set, membership function, tensor, singular decomposition, Toeplitz matrix, subset of ordered pairs*