



I T H E A



International Journal

INFORMATION

**CONTENT
&
PROCESSING**



2018 **Volume 5** **Number 2**



**International Journal
INFORMATION CONTENT & PROCESSING
Volume 5 / 2018, Number 2**

EDITORIAL BOARD

Editor in chief: **Krassimir Markov** (Bulgaria)

Abdel-Badeeh M. Salem (Egypt)	Gurgen Khachatryan (Armenia)	Olga Nevzorova (Russia)
Abdelmegeid Amin Ali (Egypt)	Hasmik Sahakyan (Armenia)	Oleksandr Stryzhak (Ukraine)
Albert Voronin (Ukraine)	Iliia Mitov (Bulgaria)	Oleksandr Trofymchuk (Ukraine)
Alexander Eremeev (Russia)	Irina Artemieva (Russia)	Orly Yadid-Pecht (Israel)
Alexander Palagin (Ukraine)	Yurii Krak (Ukraine)	Pedro Marijuan (Spain)
Alexey Petrovskiy (Russia)	Yurii Kryvonos (Ukraine)	Rafael Yusupov (Russia)
Alexey Voloshin (Ukraine)	Jordan Tabov (Bulgaria)	Sergey Krivii (Ukraine)
Alfredo Milani (Italy)	Juan Castellanos (Spain)	Stoyan Poryazov (Bulgaria)
Anatoliy Gupal (Ukraine)	Koen Vanhoof (Belgium)	Tatyana Gavrilova (Russia)
Anatoliy Krissilov (Ukraine)	Krassimira Ivanova (Bulgaria)	Vadim Vagin (Russia)
Arnold Sterenharz (Germany)	Levon Aslanyan (Armenia)	Valeria Gribova (Russia)
Benoa Depaire (Belgium)	Luis Fernando de Mingo (Spain)	Vasil Sgurev (Bulgaria)
Diana Bogdanova (Russia)	Liudmila Cheremisinova (Belarus)	Vitalii Velychko (Ukraine)
Dmitro Buy (Ukraine)	Lyudmila Lyadova (Russia)	Vitaliy Snituk (Ukraine)
Elena Zamyatina (Russia)	Mark Burgin (USA)	Vladimir Jotsov (Bulgaria)
Ekaterina Solovyova (Ukraine)	Martin P. Mintchev (Canada)	Vladimir Ryazanov (Russia)
Emiliya Saranova (Bulgaria)	Mikhail Alexandrov (Russia)	Vladimir Shirokov (Ukraine)
Evgeniy Bodyansky (Ukraine)	Nadiia Volkovych (Ukraine)	Xenia Naidenova (Russia)
Galyna Gayvoronska (Ukraine)	Nataliia Kussul (Ukraine)	Yuriy Zaichenko (Ukraine)
Galina Setlac (Poland)	Natalia Ivanova (Russia)	Yurii Zhuravlev (Russia)
Gordana Dodig Crnkovic (Sweden)	Natalia Pankratova (Ukraine)	

**IJ ICP is official publisher of the scientific papers of the members of the ITHEA®
International Scientific Society**

IJ ICP rules for preparing the manuscripts are compulsory.

The **rules for the papers** for ITHEA International Journals as well as the **subscription fees** are given on www.ithea.org.

The papers should be submitted by ITHEA® Submission system <http://ij.ithea.org>.

Responsibility for papers published in IJ IMA belongs to authors.

International Journal "INFORMATION CONTENT AND PROCESSING" Volume 5, Number 2, 2018

Edited by the **Institute of Information Theories and Applications FOI ITHEA**, Bulgaria, in collaboration with

V.M.Glushkov Institute of Cybernetics of NAS, Ukraine,
Universidad Politecnica de Madrid, Spain,
Hasselt University, Belgium

Institute of Informatics Problems of the RAS, Russia,
St. Petersburg Institute of Informatics, RAS, Russia
Institute for Informatics and Automation Problems, NAS of the Republic of Armenia.

Publisher: **ITHEA®**

Sofia, 1000, P.O.B. 775, Bulgaria. www.ithea.org, e-mail: info@foibg.com

Technical editor: **Ina Markova**

Printed in Bulgaria

Copyright © 2018 All rights reserved for the publisher and all authors.

© 2014 – 2018 "Information Content and Processing" is a trademark of ITHEA®

© ITHEA is a registered trade mark of FOI-Commerce Co.

ISSN 2367-5128 (printed)

ISSN 2367-5152 (online)

ФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ САМОПОДОБНЫХ И МУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ ЧАСТЬ 2

Людмила Кириченко, Тамара Радивилова

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время стало общепризнанным, что многие информационные, биологические, физические, технологические процессы обладают сложной фрактальной структурой. Сейчас фрактальный анализ используется для моделирования, анализа и контроля сложных систем в различных областях науки и техники: в телекоммуникациях – для предупреждения перегрузок компьютерных сетей; в геологии – для прогнозирования сейсмической активности и цунами; в биологии и медицине – для диагностики заболеваний и физиологического состояния по записям ЭКГ и ЭЭГ; в экономике – для прогнозирования кризисных ситуаций и оценивания риска по финансовым рядам; в физике – для исследования турбулентности и термодинамических процессов и т.д. Несмотря на множество публикаций, связанных с практическим применением фрактального анализа, в настоящее время не существует универсального подхода к оцениванию фрактальных характеристик, особенно для нестационарных временных рядов небольшой длины.

В серии из пяти статей будет предложена совокупность взаимосвязанных методов комплексного оценивания параметров фрактальных стохастических процессов для анализа временных рядов по выборочным данным небольших объемов.

В первой статье, *“Основные понятия, характеристики и модели самоподобных и мультифрактальных стохастических процессов”*, рассмотрены основные понятия, свойства и характеристики самоподобных

и мультифрактальных стохастических процессов и временных рядов; представлены основные модели фрактальных процессов.

Во второй статье, "*Оценивание параметра самоподобия для стационарных стохастических процессов*", рассмотрены основные методы определения показателя Херста; предложен подход к оцениванию параметра самоподобия по стационарным временным рядам, который обеспечивает несмещенное интервальное оценивание параметра самоподобия.

В третьей статье, "*Оценивание параметра самоподобия для нестационарных стохастических процессов*", предложены и исследованы методы оценивания показателя Херста для временных рядов со значительными трендовыми и циклическими составляющими; разработан комплексный метод оценивания параметра самоподобия для стационарных и нестационарных коротких временных рядов, позволяющий выбрать наиболее перспективную процедуру оценивания.

В четвертой статье, "*Оценивание мультифрактальных характеристик стохастических процессов*", проведено сравнительное исследование точности оценивания мультифрактальных характеристик для двух самых популярных методов мультифрактального анализа и разработан комплексный метод оценивания мультифрактальных характеристик для временных рядов малой длины.

В пятой статье, "*Фрактальный анализ реальных данных*", приведены результаты практического применения предложенных методов фрактального анализа в разных областях исследований, таких как инфокоммуникационные системы, финансовые рынки, биомедицинские сигналы, социальные сети и некоторых природных явления..

В предыдущем номере журнала были опубликованы первые три из них.

1. Основные понятия, характеристики и модели самоподобных и мультифрактальных стохастических процессов

2. Оценивание параметра самоподобия для стационарных стохастических процессов
3. Оценивание параметра самоподобия для нестационарных стохастических процессов

Остальные две опубликованы в этом номере журнала.

4. Оценивание мультифрактальных характеристик стохастических процессов
5. Фрактальный анализ реальных данных

Благодарности

Работа опубликована при поддержке общества ITHEA ISS (www.ithea.org) и лично Крассимира Маркова, которому авторы выражают глубокую признательность за помощь и понимание.

Информация об авторах



Людмила Кириченко – д.т.н., профессор Харьковского национального университета радиоэлектроники; пр. Науки 14, 61166, Харьков, Украина; e-mail: lyudmyla.kirichenko@nure.ua.

Основные области научных исследований: самоподобные и мультифрактальные временные ряды, фрактальный анализ, вейвлет-анализ, детерминированные хаотические системы.



Тамара Радивилова – к.т.н., доцент Харьковского национального университета радиоэлектроники; пр. Науки 14, 61166, Харьков, Украина; e-mail: tamara.radivilova@gmail.com.

Основные области научных исследований: самоподобные и мультифрактальные временные ряды, телекоммуникационные системы, управление трафиком, информационная безопасность.

ОЦЕНИВАНИЕ МУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Людмила Кириченко, Тамара Радивилова

Мультифрактальный анализ был первоначально предложен для статистического исследования особенностей скейлинга сингулярных мер. Мультифрактальный подход предполагает, что исследуемое множество каким-то образом можно разделить на части, для каждой из которых существует свой скейлинг самоподобия. В настоящее время мультифрактальный анализ стал востребованным инструментом в разных областях науки – при изучении свойств клеточных элементов крови в биологии и диффузионного роста кластеров, в теории развитой гидродинамической турбулентности, при исследовании квазикристаллов в физике твердого тела, для анализа структуры молекул ДНК, для описания фрактальной структуры странных аттракторов и т.д. В данном разделе проведено сравнительное исследование точности оценивания мультифрактальных характеристик для двух самых популярных методов мультифрактального анализа: мультифрактального флуктуационного детрендрованного анализа и метод максимумов модулей вейвлет-преобразования.

4.1 Мультифрактальные характеристики математических моделей фрактальных стохастических процессов

Для анализа точности оценивания мультифрактальных методов были использованы тестовые модельные реализации моно- и мультифрактальных стохастических процессов: фрактального броуновского движения (монофрактальный процесс), α – устойчивого процесса (бифрактальный процесс) и мультифрактальных детерминированных и стохастических каскадных процессов.

Количественные мультифрактальные характеристики: обобщенный показатель Херста, скейлинговая экспонента и функция мультифрактального спектра были рассмотрены в подразделе 1.2.1.

Фрактальное броуновское движение. Наиболее известной и простой моделью самоподобного процесса является ФБД, рассмотренное в подразделе 1.3.1. ФБД можно рассматривать как монофрактальный процесс, у которого скейлинговая экспонента является линейной функцией показателя Херста H :

$$\begin{cases} h(q) = H, \\ \tau(q) = qH - 1, \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = H, \\ f(\alpha) = 1. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

На рис. 4.1 сверху показана типичная реализация ФБД при значении параметра $H=0.8$ длиной 1000 значений и соответствующая ей реализация фрактального гауссовского шума. В нижней части рис. 4.1 приведены теоретические значения обобщенного показателя Херста, скейлинговой экспоненты и мультифрактального спектра для ФБД с показателем $H=0.8$.

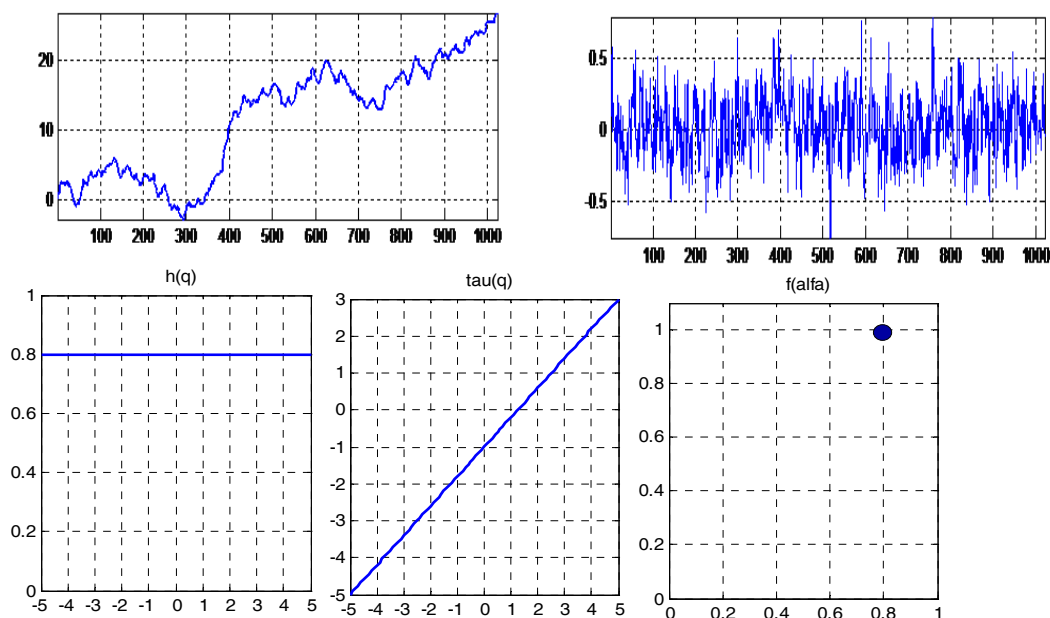


Рисунок 4.1 – Реализация ФБД (вверху слева), ряд приращений (вверху справа), теоретические значения обобщенного показателя Херста, скейлинговой экспоненты и мультифрактального спектра

α – устойчивые процессы (подраздел 1.3.2) обладают свойствами самоподобия. Показано [Nakao 2000], что такие процессы являются бифрактальными. Соответствующие мультифрактальные характеристики имеют вид:

$$h(q) = \begin{cases} 1/\alpha_L & q \leq \alpha_L, \\ 1/q & q > \alpha_L; \end{cases}$$

$$\tau(q) = \begin{cases} q/\alpha_L - 1 & q \leq \alpha_L, \\ 0 & q > \alpha_L; \end{cases}, \quad (4.2)$$

$$\begin{cases} \alpha = \begin{cases} 1/\alpha_L & q \leq \alpha_L, \\ 0 & q > \alpha_L; \end{cases} \\ f(\alpha) = \begin{cases} 1 & q \leq \alpha_L, \\ 0 & q > \alpha_L; \end{cases} \end{cases},$$

где величина α_L в данном случае обозначает индекс устойчивости

На рисунке 4.2 вверху показана типичная реализация процесса при значении параметра $\alpha_L = 1.5$ длиной 1000 значений и соответствующая ей реализация приращений, являющимися с независимыми стандартными устойчивыми случайными величинами $S_\alpha(1,0,0)$. Реализации такого процесса имеют теоретическую бесконечную дисперсию и являются самоподобными с показателем Херста $H = \frac{1}{\alpha_L} = \frac{2}{3}$. В нижней части

рисунка 4.2 приведены теоретические значения обобщенного показателя Херста, скейлинговой экспоненты и мультифрактального спектра для этого процесса.

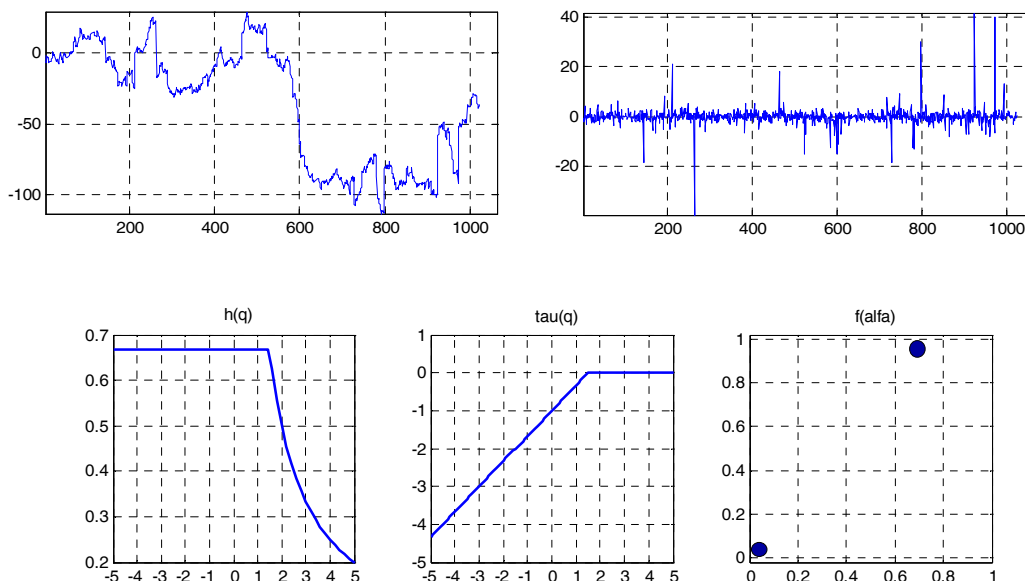


Рисунок 4.2 – Реализация α – устойчивого процесса (вверху слева), ряд приращений (вверху справа), теоретические значения $h(q)$, $\tau(q)$ и $f(\alpha)$

Детерминированный биномиальный каскад. Простейшей моделью мультифрактального процесса с заданными свойствами является детерминированный биномиальный каскад, рассмотренный в подразделе 1.3.3. Характеристики $h(q)$, $\tau(q)$ и $f(\alpha)$ для биномиального мультифрактального процесса зависят только от коэффициентов p_1 и p_2 и определяются аналитически следующим образом:

$$\begin{aligned}
 h(q) &= \left(\frac{1}{q} - \frac{\ln(p_1^q + p_2^q)}{q \ln 2} \right), \\
 \tau(q) &= \frac{-\ln(p_1^q + p_2^q)}{\ln 2};
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = -\frac{p_1^q \ln(p_1) + p_2^q \ln(p_2)}{\ln 2(p_1^q + p_2^q)}, \\ f(\alpha) = -\frac{q}{\ln 2} \frac{p_1^q \ln(p_1) + p_2^q \ln(p_2)}{(p_1^q + p_2^q)} + \frac{\ln(p_1^q + p_2^q)}{\ln 2}. \end{array} \right.$$

На рис. 4.3 сверху показан временной ряд значений биномиального каскада при $p_1=0.7$ и $n=10$, т.е. длиной реализации равной 2^{10} значений. В нижней части рисунка 4.3 приведены соответствующие теоретические значения обобщенного показателя Херста, скейлинговой экспоненты и мультифрактального спектра.

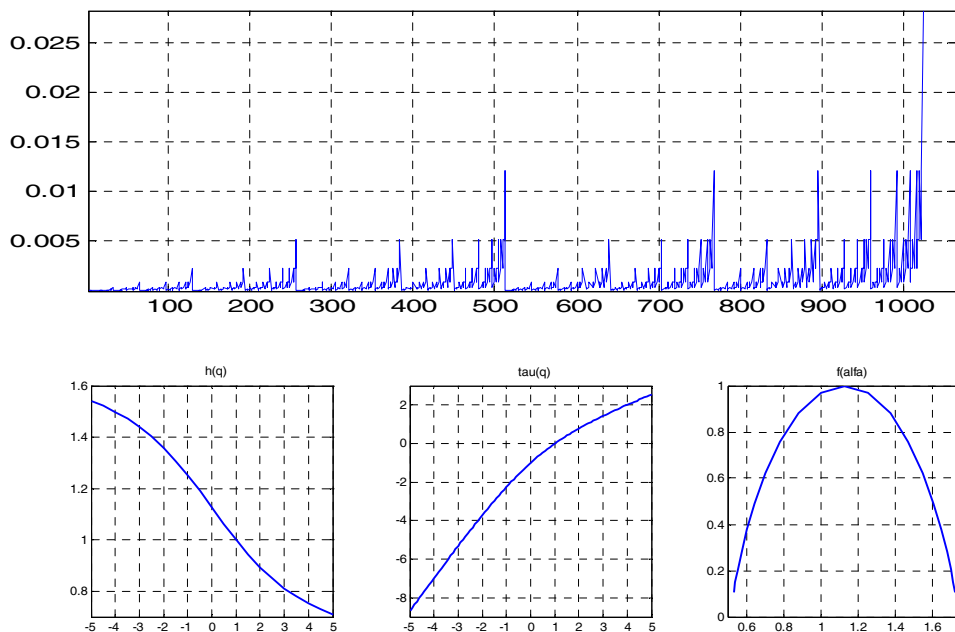


Рисунок 4.3 – Реализация биномиального каскада, теоретические значения функций $h(q)$, $\tau(q)$ и $f(\alpha)$

Стохастический биномиальный каскад. При построении стохастических каскадов весовыми коэффициентами являются независимые значения некоторой заданной случайной величины W (см. подраздел 1.3.3).

Наиболее эффективно использовать случайную величину с равномерным распределением (Beta(1,1)) на интервале [0, 1]. В этом случае можно аналитически определить скейлинговую экспоненту $\tau(q)$ на интервале значений $q > -1$ [Riedi, 2002]:

$$\tau(q) = -\log_2 \frac{\text{Beta}(1+q,1)}{\text{Beta}(1,1)} - 1. \quad (4.4)$$

Значения обобщенного показателя Херста $h(q)$ и $f(\alpha)$ были получены численно из (4.4) в соответствии с формулами (1.15) и (1.21). На рис. 4.4 вверху представлена типичная реализация биномиального стохастического каскада, у которого веса имеют равномерное распределение длиной реализации равной 1024 значения. В нижней части рис. 4.4 приведены соответствующие теоретические значения обобщенного показателя Херста, скейлинговой экспоненты и мультифрактального спектра.

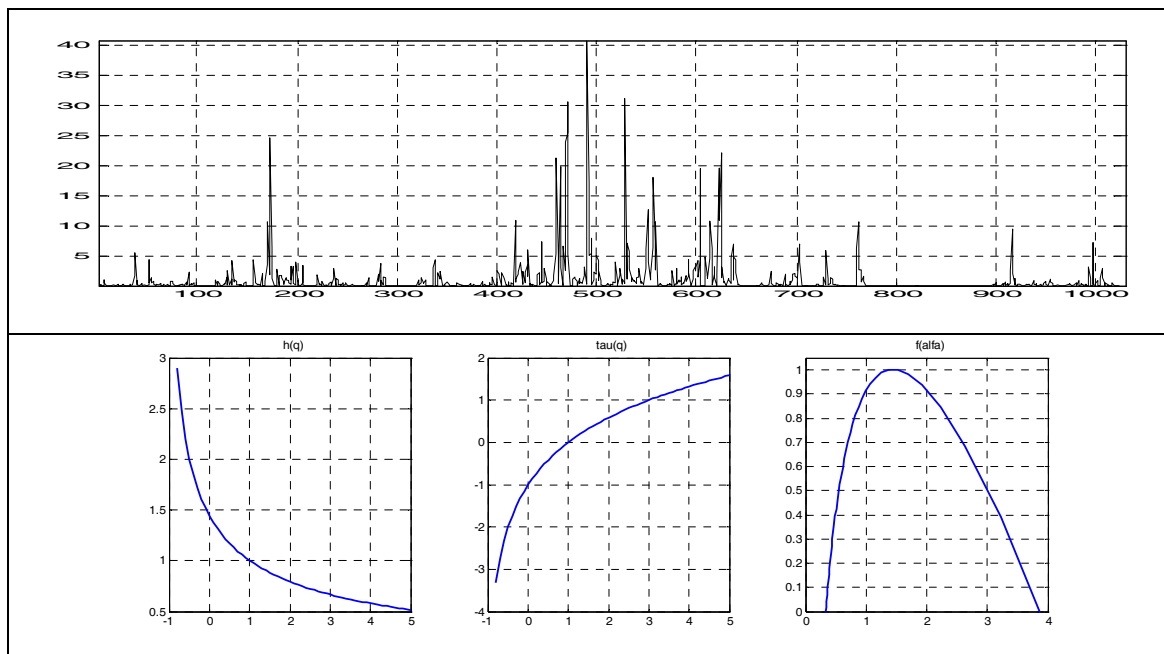


Рисунок 4.4 – Реализация стохастического каскада, теоретические значения функций $h(q)$, $\tau(q)$ и $f(\alpha)$

4.2 Мультифрактальный флуктуационный анализ

Метод детрендрованного флуктуационного анализа рассмотрен в разделах 2 и 3. При проведении мультифрактального флуктуационного детрендрованного анализа (МФДФА) [Kantelhardt, 2002; Kantelhardt, 2008] исследуется зависимость флуктуационной функции $F_q(s)$ от параметра q :

$$F_q(s) = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [F^2(s)]^{\frac{q}{2}} \right\}^{\frac{1}{q}}, \quad (4.5)$$

которая получена возведением выражения (2.14) в степень q и последующим усреднением по всем сегментам. Поскольку при $q=0$ выражение (4.5) содержит неопределенность, то вместо него используют следующее выражение:

$$F_q(\tau) = \text{Exp} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln[F^2(\tau)] \right\}.$$

Изменяя временную шкалу s при фиксированном показателе q , находим зависимость $F_q(s)$, представляя её в двойных логарифмических координатах. Если исследуемый ряд сводится к мультифрактальному множеству, проявляющему долгосрочные зависимости, то флуктуационная функция $F_q(s)$ представляется степенной зависимостью

$$F_q(s) \propto s^{h(q)}, \quad (4.6)$$

где $h(q)$ - функция обобщенного показателя Херста.

Из выражения (4.5) следует, что при $q=2$ этот показатель сводится к обычному значению параметра Херста H .

На рисунке 4.5 представлены флуктуационные функции $F_q(s)$ для монофрактального (слева) и мультифрактального (справа) процессов для значений параметра $q = \{-5, -2, 0, 2, 5\}$.

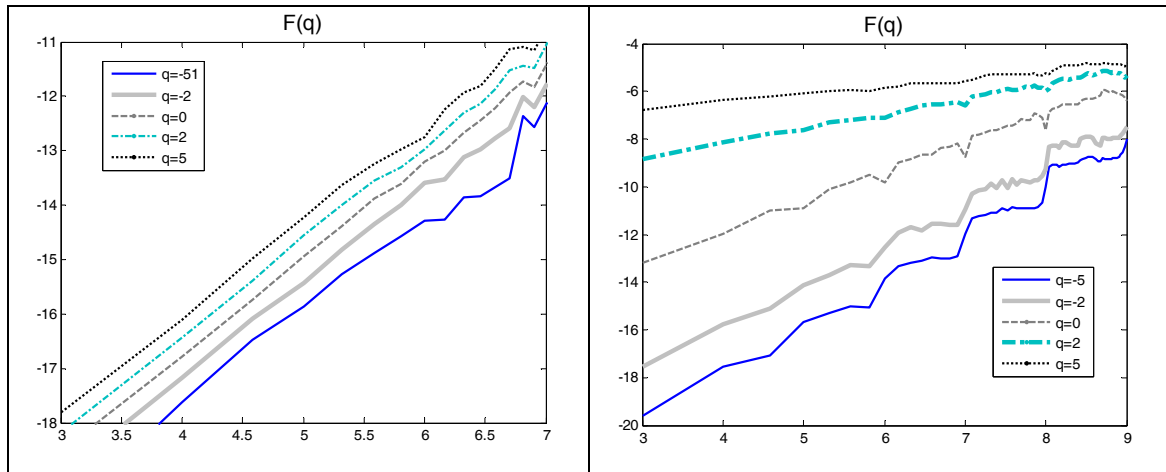


Рисунок 4.5 – $F_q(s)$ для монофрактального (слева) и мультифрактального (справа) процессов

На рисунке 4.6 представлены функции обобщенного показателя Херста $h(q)$, полученные по реализациям детерминированного биномиального каскада при значениях весового коэффициента $p_1 = \{0.6, 0.7, 0.8, 0.9\}$.

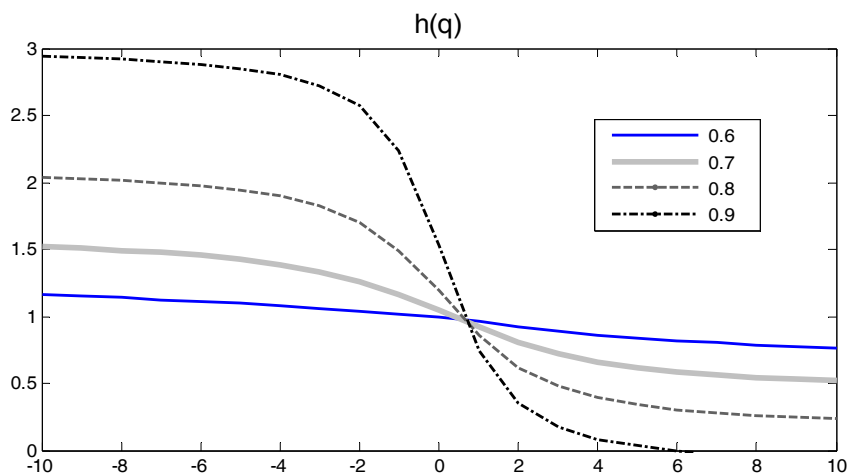


Рисунок 4.6 – Функции $h(q)$ для реализаций детерминированного каскада при разных значениях p_1 .

Для временных рядов, которые отвечают монофрактальному множеству, флуктуационная функция $F_q(s)$ одинакова для всех сегментов, и обобщенный показатель Херста $h(q) = H$ не зависит от параметра q . Для мультифрактальных рядов $h(q)$ является нелинейной функцией: при положительных q основной вклад в функцию $F_q(s)$ дают сегменты, проявляющие большие отклонения $F^2(s)$, а при отрицательных q доминируют сегменты с малыми дисперсиями $F^2(s)$. Таким образом, при отрицательных значениях q обобщенный показатель Херста $h(q)$ описывает сегменты, проявляющие малые флуктуации, а при положительных – большие.

Исходя из вышеуказанного можно предложить следующий пошаговый алгоритм оценивания мультифрактальных характеристик по временному ряду $X(t)$, $t = 1, 2, \dots, n$.

1. Для расчета необходимо преобразовать исходный ряд в кумулятивный

$$X^{cum}(k) = \sum_{t=1}^k X(t), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Если исходный ряд уже является кумулятивным, данный шаг пропускается.

2. Задаются значения параметра q , в диапазоне которых требуется найти значения мультифрактальных характеристик $h(q)$, $\tau(q)$, $f(\alpha)$.

3. Ряд $X^{cum}(t)$ разбивается на N неперекрывающихся сегментов длиной τ и для каждого сегмента $X^{cum}(t)$ вычисляется флуктуационная функция

$$F^2(\tau) = \frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} (X^{cum}(t) - Y_m(t))^2, \quad (4.7)$$

где $Y_m(t)$ – локальный m -полиномиальный тренд в пределах данного сегмента.

4. Функция $F(\tau)$ усредняется по всему ряду $X^{cum}(t)$

$$F(\tau) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_i^2(\tau)},$$

5. Вычисляется флуктуационная функция для значения q :

$$F_q(\tau) = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [F_i^2(\tau)]^{\frac{q}{2}} \right\}^{\frac{1}{q}}, \quad (4.8)$$

6. Значение τ увеличивается и шаги 3–5 повторяются.

7. Строится линейная регрессия методом наименьших квадратов на $\log(\tau)$, как независимой переменной, и $\log F_q(\tau)$, как зависимой переменной. Тангенс угла наклона прямой, аппроксимирующей полученные точки, определяет значение величины $h(q)$ для заданного значения q .

7. Выполнив шаги 2-6 для всех заданных значений параметра q , получаем зависимость $h(q)$.

8. Значения скейлинговой экспоненты $\tau(q)$ определяются по формуле (1.15); значения функции мультифрактального спектра $f(\alpha)$ находятся с помощью преобразования Лежандра согласно (1.21).

4.3 Метод максимумов модулей вейвлет-преобразования

Метод максимумов модулей вейвлет-преобразования базируется на математическом аппарате вейвлет-анализа [Muzy, 1991; Muzy, 1993]. Непрерывное вейвлет-преобразование функции $X(t)$ имеет вид

$$W(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} X(t)\Psi_{ab}(t)dt, \quad (4.9)$$

где $\Psi_{ab}(t)$ - вейвлет-функция с параметрами масштаба a и сдвига b .

Алгоритм ММВП предполагает исследование поведения функции $X(t)$ в два этапа. На первом этапе выполняется вейвлет-преобразование по формуле (4.9). Результат вейвлет-преобразования – функция $W(a,b)$ – является вейвлет–спектром и может быть представлена как поверхность вейвлет-коэффициентов в трехмерном пространстве. На рис. 4.7 вверху приведена реализация детерминированного биномиального каскада при значении весового коэффициента $p_1 = 0.7$. В средней части рис. 4.7 представлена поверхность вейвлет-коэффициентов $W(a,b)$ для данной реализации. Наиболее важная информация содержится в линиях локальных экстремумов $W(a,b)$ (рис. 4.7 внизу), поиск которых проводится на каждом масштабе a .

Выбор вейвлет-функции, обладающей нулевыми моментами m -го порядка (3.7), определяется несколькими аспектами. С одной стороны, большое значение m позволяет проигнорировать крупномасштабные полиномиальные тренды и анализировать мелко-масштабные вариации функции $X(t)$. С другой стороны, увеличение числа нулевых моментов приводит к увеличению числа линий локальных экстремумов вейвлет-коэффициентов и появлению большого числа дополнительных линий, обрывающихся на малых масштабах [Павлов, 2007]. Такие линии являются слишком короткими для оценивания степенных зависимостей, и становятся помехами при проведении численного анализа сингулярностей.

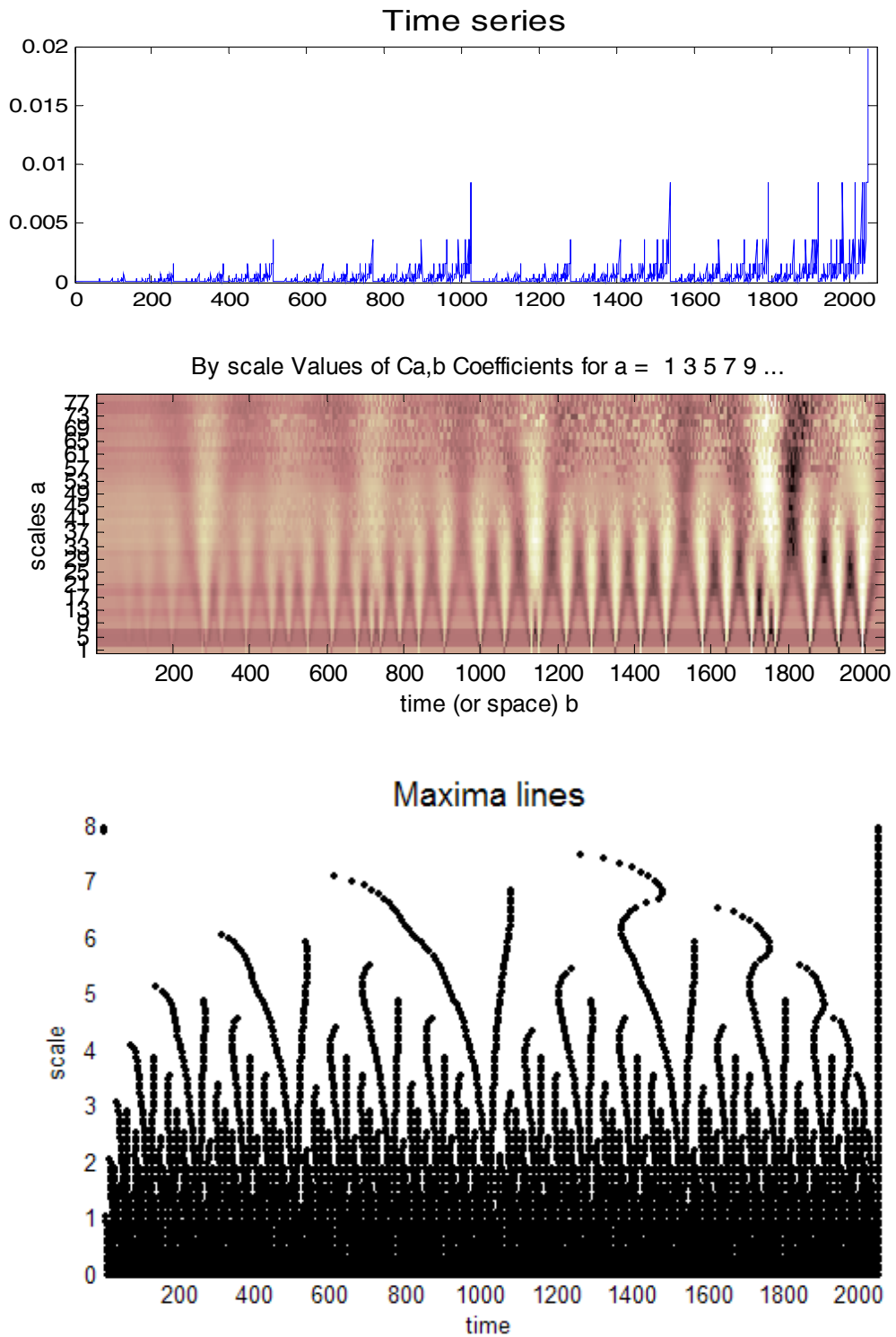


Рисунок 4.7 – Реализация биномиального каскада, поверхность вейвлет-коэффициентов, линии локальных максимумов

Обычно в качестве материнских вейвлет-функций используются вейвлеты семейства Гаусса. Если взяты производные высокого порядка функции Гаусса, то число дополнительных коротких линий локальных макси-мумов $W(a, t)$ возрастает, что обуславливается осциллирующими «хвостами» вейвлет-функций. Поэтому при проведении мультифрактального анализа целесообразно ограничиваться значением $m = 2$. [Музы, 1993].

Выделением «скелетона» заканчивается первый шаг алгоритма ММВП. Второй шаг метода ММВП заключается в расчете статистической суммы (частичной функции):

$$Z(q, a) = \sum_{l \in L(a)} \left(\sup_{a' \leq a} |W(a', x_l(a'))| \right)^q, \quad (4.10)$$

где $L(a)$ – множество всех линий l максимумов модулей вейвлет-коэффициентов на масштабе a ; $x_l(a)$ – расположение максимума на этом масштабе.

Для вычисления $Z(q, a)$ выбирается максимальное значение модуля вейвлет-коэффициентов вдоль каждой линии на масштабах, меньших заданного значения масштаба a . В этом случае выполняется зависимость

$$Z(q, a) \propto a^{\tau(q)}, \quad (4.11)$$

где $\tau(q)$ – скейлинговая экспонента, которую определяют для каждого значения q путем вычисления тангенса угла наклона $\ln Z(q, a)$ от $\ln a$.

Основанный на вейвлет-преобразовании мультифрактальный анализ позволяет исследовать сингулярности при отрицательных значениях q [Павлов 2007]. Частичные функции $Z(q, a)$ при $q < 0$ характеризуют особенности скейлинга для слабых сингулярностей (малых флуктуаций), а при $q > 0$ – для сильных сингулярностей (больших флуктуаций).

На рис. 4.8(а) представлены статистические суммы $Z(q, a)$, полученные по реализации детерминированного каскада при $p_1 = 0.8$ для значений $q = \{-5, -2, 0, 2, 5\}$. На рис. 4.8(б) показаны $\tau(q)$ для мультифрактальной (каскад, $p_1 = 0.8$) и монофрактальной (ФБД, $H = 0.8$) реализаций.

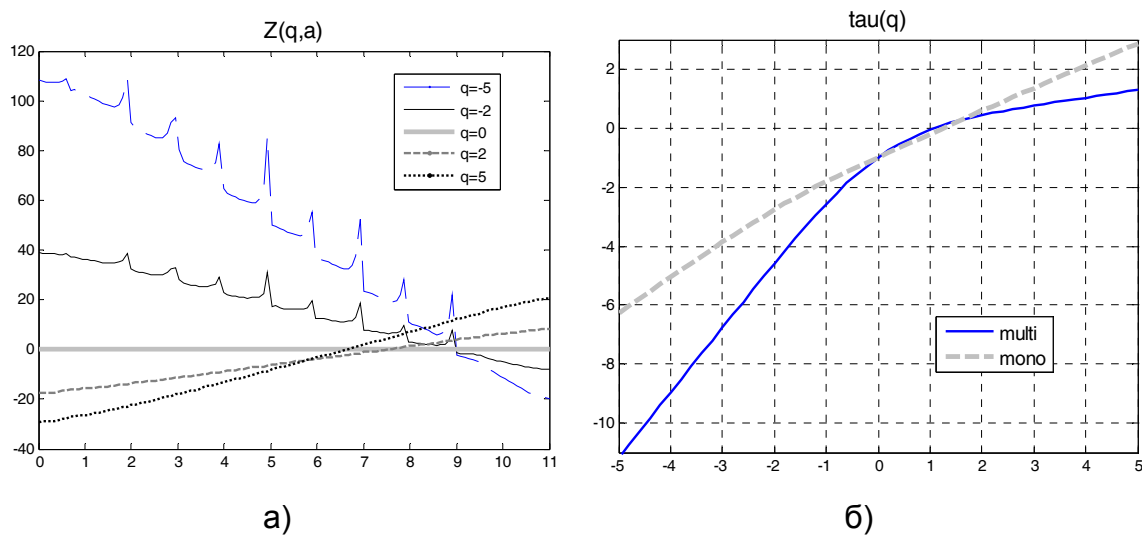


Рисунок 4.8 – Функции $Z(q, a)$ для детерминированного каскада при разных q (а); функции $\tau(q)$ для монофрактальной и мультифрактальной реализаций (б)

Можно предложить следующий пошаговый алгоритм оценивания мультифрактальных характеристик по временному ряду $X(t)$, $t = 1, 2, \dots, n$.

1. Для расчета необходимо преобразовать исходный ряд в кумулятивный

$$X^{cum}(k) = \sum_{t=1}^k X(t), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Если исходный ряд уже является кумулятивным, данный шаг пропускается

2. Для данного ряда выполняется вейвлет-преобразование по формуле (4.10) и находится спектр вейвлет-коэффициентов $W(a,b)$.
3. Для поверхности $W(a,b)$ определяется множество линий локальных максимумов.
4. Задаются значения параметра q , в диапазоне которых требуется найти значения мультифрактальных характеристик $h(q)$, $\tau(q)$, $f(\alpha)$.
5. В соответствии с формулой (4.10) вычисляется частичная функция $Z(q,a)$ для заданного значения q и заданных значений масштаба a
6. В соответствии с (4.10) строится линейная регрессия $\log(a)$, как независимой переменной, и $\log Z(q,a)$, как зависимой переменной Тангенс угла наклона прямой, аппроксимирующей полученные точки, определяет значение величины $\tau(q)$ для заданного значения q .
5. Выполнив шаги 4-6 для всех заданных значений параметра q , получаем значения скейлинговой экспоненты $\tau(q)$.
7. Значения обобщенного показателя Херста $h(q)$ определяются по формуле (1.15); значения функции мультифрактального спектра $f(\alpha)$ находятся с помощью преобразования Лежандра согласно (1.21).

4.4 Сравнительный анализ оценок мультифрактальных характеристик, полученных разными методами

В работах [Кириченко, 2011, 1; Кириченко, 2011, 2; Kirichenko, 2014] представлены результаты численного эксперимента, в ходе которого моделировались реализации разных типов фрактальных стохастических процессов: фрактального броуновского движения (монофрактальный процесс) и мультифрактальных детерминированных и стохастических каскадных процессов. Длина реализаций была выбрана равной 256, 512, 1024 и 2048 значений. Для каждого сгенерированного временного ряда

методами МФДФА и ММВП рассчитывалась мультифрактальные характеристики $h(q)$, $\tau(q)$ и $f(\alpha)$, которые потом усреднялись по множеству реализаций. Значения параметра q изменялись в диапазоне $-5 \leq q \leq 5$. В работах [Kantelhardt, 2008; Павлов, 2007] показано, что большие значения параметра q приводят к большим погрешностям.

Поскольку функции $h(q)$, $\tau(q)$ и $f(\alpha)$ взаимно-однозначно связаны, для количественного оценивания степени близости к теоретическим характеристикам достаточно оценить только по одной функции обобщенного показателя Херста $h(q)$:

$$\Delta h = \frac{1}{n_q} \sum_q \left| \hat{h}(q) - h_T(q) \right| \quad (4.12)$$

где $h_T(q)$ – теоретическое значение функции обобщенного показателя Херста; $\hat{h}(q)$ – выборочное значение функции; n_q – число значений параметра q ; Δh – среднее отклонение выборочного значения от теоретического.

Имеет смысл вместо одной величины Δh рассматривать отдельно несколько ее составляющих, поскольку методы могут иметь различные погрешности для положительных и отрицательных значений параметра q : $\Delta h(q < 0)$, $\Delta h(q > 0)$. Т.к. значение $q = 0$ является точкой, требующей особых вариантов вычисления $\hat{h}(q)$, отклонения в этой точке можно не учитывать. Также необходимо выделить величину

$$\Delta H = \left| \hat{h}(2) - h_T(2) \right| \quad (4.13)$$

где величина ΔH представляет отклонение показателя Херста.

4.4.1 Оценивание монофрактальных реализаций

Рассмотрим оценивание мультифрактальных характеристик для реализаций монофрактального процесса, которым является ФБД.

Рассмотрим выборочные мультифрактальные характеристики, полученные методом МФДФА по реализациям ФБД разной длины. На рис. 4.9 представлены выборочные значения обобщенного показателя Херста рассчитанного в соответствии с (4.5) и функции мультифрактального спектра, полученной численно реализованными преобразованиями Лежандра. Выборочные функции $\tau(q)$ визуально очень близки друг другу, поэтому их графики здесь не приведены. Прямой линией на графике выборочной функции $h(q)$ показаны ее теоретические значения. Хотя теоретический мультифрактальный спектр $f(\alpha)$ представляет собой точку $(0.8, 1)$, выборочный спектр $f(\alpha)$ демонстрирует мультифрактальные свойства.

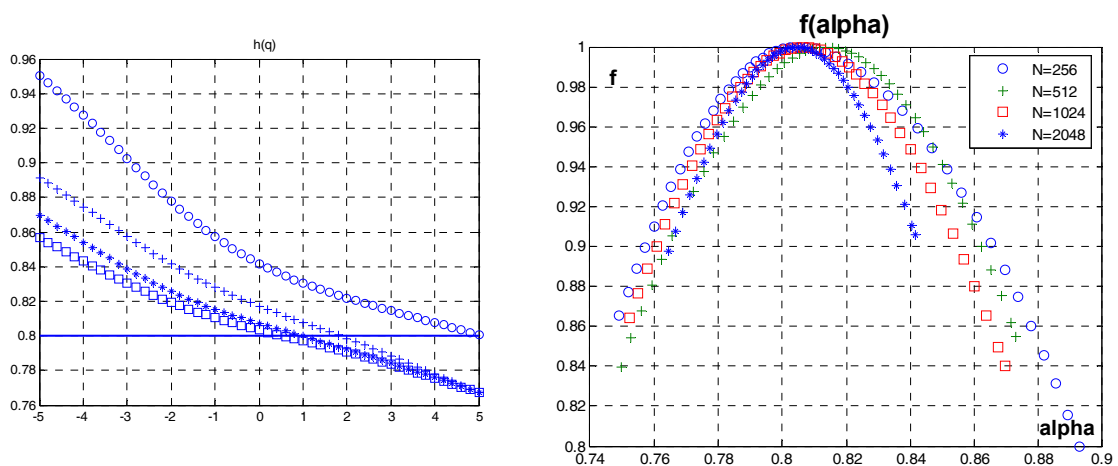


Рисунок 4.9 – Функции $h(q)$ и $f(\alpha)$, полученные методом МФДФА

На рисунке 4.10 представлены выборочные значения функции обобщенного показателя Херста и мультифрактального спектра, полученные по реализациям ФБД разной длины методом ММВП.

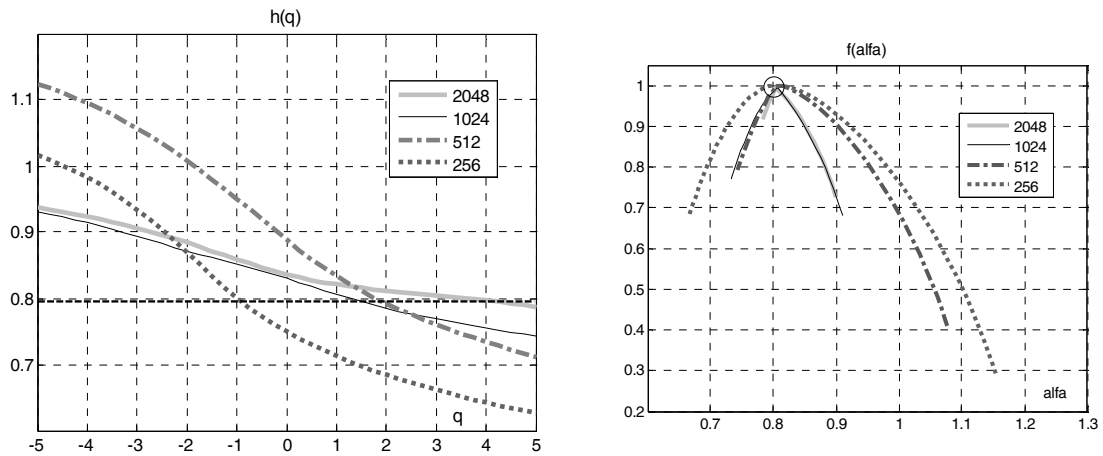


Рисунок 4.10 – Выборочные функции $h(q)$ и $f(\alpha)$ для реализаций ФБД, полученные методом ММВП

С увеличением длины реализации выборочные характеристики стремятся к своим теоретическим значениям. Однако, при небольшом числе значений во временном ряде, полученные оценки характеристики демонстрируют ложные мультифрактальные свойства. Очевидно, что оценки мультифрактальных характеристик, полученные методом МФДФА, значительно ближе к своим теоретическим значениям, чем оценки, построенные с применением ММВП. К тому же, при использовании метода ММВП, построение вейвлет-спектра, линий локальных максимумов, выбор подходящего диапазона изменения масштаба вейвлет-преобразования, представляет собой значительно более сложную задачу, чем определение степени полинома и диапазона длин сегментов для флуктуационного анализа.

В таблице 4.1 приведены отклонения выборочных функций от теоретических значений, которые подтверждают преимущества метода МФДФА при анализе монофрактальных процессов.

Таблица 4.1 – Отклонения выборочных функций для монофрактальных реализаций

Длина ряда	Метод	ΔH	$\Delta h (q < 0)$	$\Delta h (q > 0)$
256	ММВП	0.12	0.18	0.13
	МФДФА	0.02	0.094	0.018
512	ММВП	0.008	0.3	0.026
	МФДФА	0.004	0.06	0.015
1024	ММВП	0.028	0.27	0.023
	МФДФА	0.0077	0.035	0.014
2048	ММВП	0.01	0.15	0.007
	МФДФА	0.009	0.025	0.014

4.4.2 Оценивание бифрактальных реализаций

Рассмотрим выборочные мультифрактальные характеристики, полученные методом МФДФА по реализациям α – устойчивого процесса разной длины. На рисунке 4.11 представлены выборочные значения обобщенного показателя Херста и функции мультифрактального спектра. Выборочные функции $\tau(q)$ визуальны очень близки друг другу, поэтому их графики здесь не приведены. Пунктирной линией на графике выборочной функции $h(q)$ показано теоретическое значения. Хотя теоретический мультифрактальный спектр $f(\alpha)$ представляет собой две точки $(0,0)$ и

$(2/3, 1)$, выборочный спектр $f(\alpha)$ демонстрирует мультифрактальные свойства.

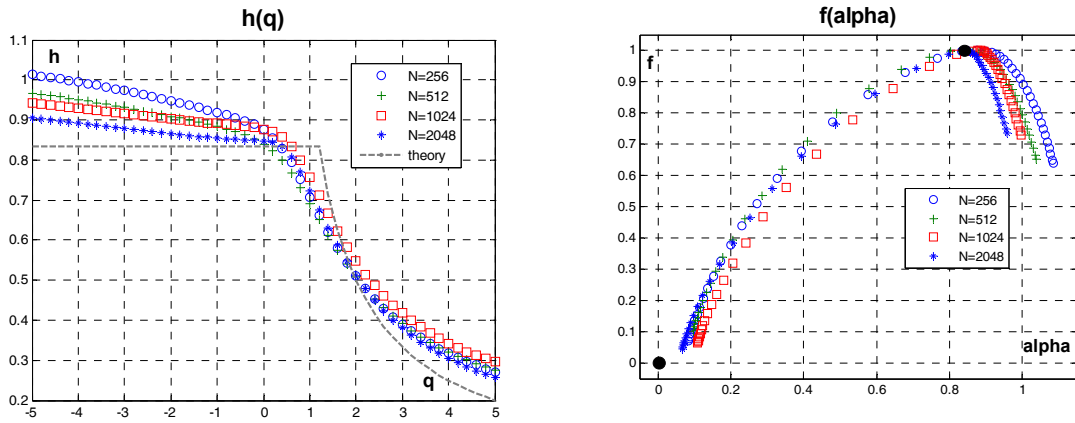


Рисунок 4.11 – Выборочные функции $h(q)$ и $f(\alpha)$ для реализаций α – устойчивого процесса, полученные методом МФДФА

На рисунке 4.12 представлены выборочные значения функции обобщенного показателя Херста и мультифрактального спектра, полученные по реализациям α – устойчивого процесса разной длины методом ММВП.

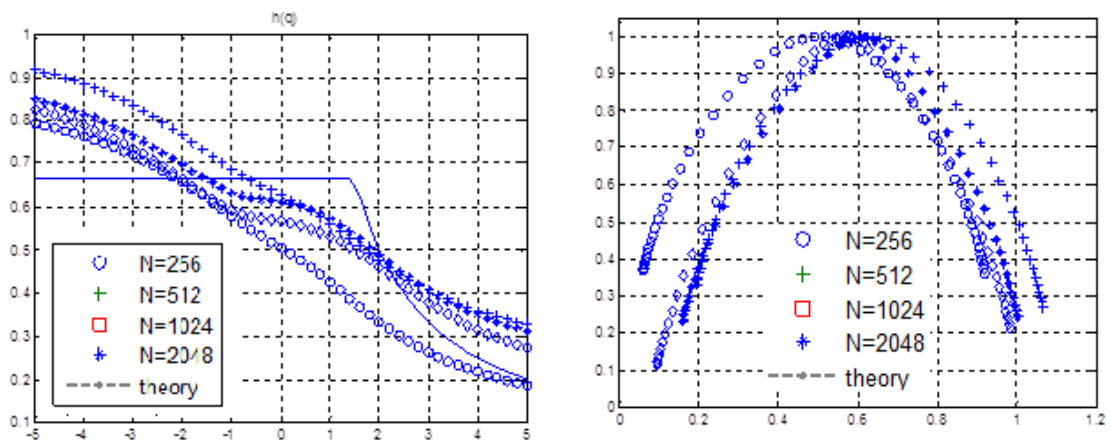


Рисунок 4.12 – Выборочные функции $h(q)$ и $f(\alpha)$ для реализаций α – устойчивого процесса, полученные методом ММВП

С увеличением длины реализации выборочные характеристики стремятся к своим теоретическим значениям. Однако, полученные оценки характеристики демонстрируют ложные мультифрактальные свойства. В спектре $f(\alpha)$, как и в случае оценивания характеристик для ряда броуновского движения, характерно наличие ложных точек, что может привести к неправильным выводам о мультифрактальных свойствах реализаций. Оценки мультифрактальных характеристик, полученные методом МФДФА, ближе к своим теоретическим значениям, чем оценки, построенные с применением ММВП, о чем свидетельствуют данные таблицы 4.2.

В таблице 4.2 приведены отклонения выборочных функций от теоретических значений, которые подтверждают большую точность метода МФДФА при анализе процессов с дискретным фрактальным спектром. Результаты вычислений подтверждают результаты, полученные в работах [Kantelhardt, 2002; Oswiecimka, 2006] для реализаций длиной более 60000 значений.

Таблица 4.2 – Отклонения выборочных функций для бифрактальных реализаций

Длина ряда	Метод	ΔH	$\Delta h (q < 0)$	$\Delta h (q > 0)$
256	ММВП	0.167	0.076	0.12
	МФДФА	0.001	0.096	0.056
512	ММВП	0.025	0.13	0.086
	МФДФА	0.004	0.064	0.058
1024	ММВП	0.076	0.08	0.07
	МФДФА	0.011	0.057	0.05
2048	ММВП	0.006	0.08	0.07
	МФДФА	0.003	0.054	0.041

4.4.3 Оценивание реализаций детерминированного биномиального каскада

Рассмотрим оценивание мультифрактальных характеристик для реализаций детерминированного мультипликативного биномиального каскада. В отличие от реализаций остальных случайных процессов, где для каждой сгенерированной реализации рассчитывались выборочные характеристики, которые потом усреднялись, в этом случае оценки не усреднялись: для каждой реализации был только один набор мультифрактальных характеристик, полученных разными методами.

Рассмотрим выборочные мультифрактальные характеристики, полученные методом МФДФА по реализациям детерминированного каскада с начальным весовым коэффициентом $p_1 = 0.7$ разной длины. На рис. 4.13 представлены выборочные значения обобщенного показателя Херста и функции мультифрактального спектра. Пунктирной линией на графике выборочных функций $h(q)$ и $f(\alpha)$ показаны их теоретические значения.

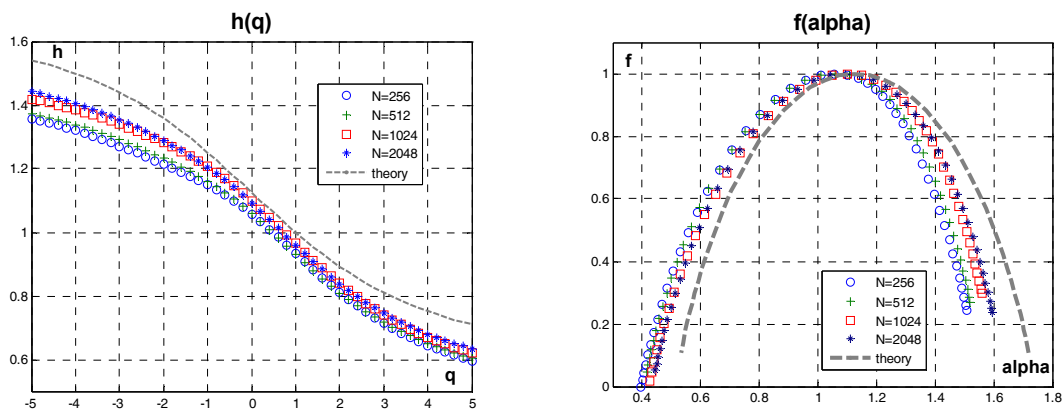


Рисунок 4.13 – Выборочные функции $h(q)$ и $f(\alpha)$ для реализаций детерминированного биномиального каскада, полученные методом МФДФА

При оценивании рядов с мультифрактальными свойствами метод ММВП позволяет получить оценки, лучшие по своим статистическим характеристикам с оценками, полученными методом МФДФА (в смысле большей близости к теоретическим значениям). Это очевидно при сравнении рис. 4.13 и рис. 4.14, где представлены выборочные функции, полученные с помощью непрерывного вейвлет-преобразования, а так же при сравнении величин отклонений оценок от теоретических значений, приведенных в таблице 4.3.

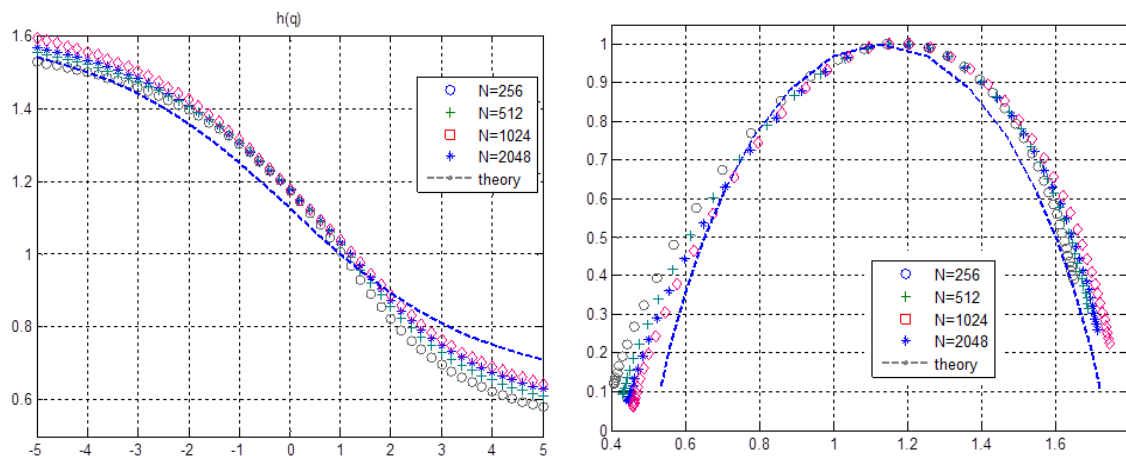


Рисунок 4.14 – Выборочные функции $h(q)$ и $f(\alpha)$ для реализаций детерминированного биномиального каскада, полученные методом ММВП

При небольшом числе значений во временном ряде его выборочные фрактальные характеристики демонстрируют смещение диапазона значений. В обоих случаях с увеличением длины реализации выборочные характеристики стремятся к своим аналитическим значениям. Необходимо отметить, что характеристики, полученные на основе метода ММВП, очень чувствительны к изменению масштаба диапазона вейвлет-преобразования, в то время как метод флуктуационного анализа позволяет получать устойчивые оценки.

В таблице 4.3 приведены отклонения выборочных функций от теоретических значений, которые показывают определенные преимущества метода, основанного на вейвлет-преобразованиях, при анализе процессов с непрерывным мультифрактальным спектром.

Таблица 4.3 – Отклонения выборочных функций для реализаций детерминированного каскада

Длина ряда	Метод	ΔH	$\Delta h (q < 0)$	$\Delta h (q > 0)$
256	ММВП	0.07	0.026	0.084
	МФДФА	0.24	0.27	0.23
512	ММВП	0.039	0.037	0.064
	МФДФА	0.17	0.15	0.17
1024	ММВП	0.02	0.043	0.051
	МФДФА	0.14	0.12	0.13
2048	ММВП	0.006	0.059	0.042
	МФДФА	0.12	0.06	0.11

4.4.4 Оценивание реализаций стохастического биномиального каскада

Рассмотрим оценивание мультифрактальных характеристик для реализаций стохастических мультипликативных биномиальных каскадов, весовые коэффициенты которых имеют равномерное распределение. Для

сравнения с аналитическими характеристиками (4.4) вычисления проводились в диапазоне значений параметра $-1 < q < 5$.

На рисунке 4.15 представлены выборочные значения обобщенного показателя Херста и функции мультифрактального спектра, полученные методом МФДФА по реализациям стохастического каскада разной длины. Пунктирной линией на графике выборочных функций $h(q)$ и $f(\alpha)$ показаны их теоретические значения. Оценки показывают хорошую согласованность с теоретическими значениями в области положительных значений параметра q . Численные значения расхождений приведены в таблице 4.4. Поскольку отрицательные значения параметра q ограничены диапазоном $-1 < q < 0$, правая часть мультифрактального спектра $f(\alpha)$ представлена недостаточно полно.

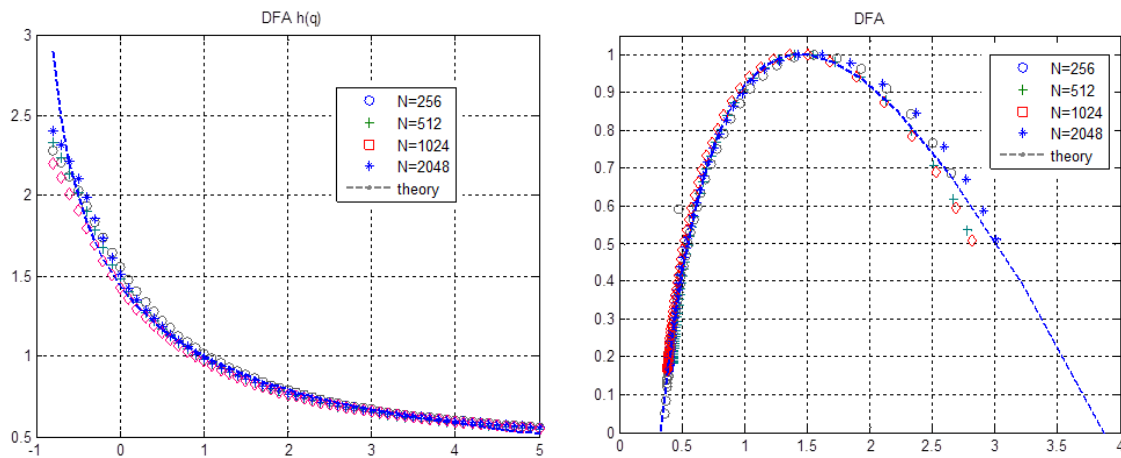


Рисунок 4.15 – Выборочные функции $h(q)$ и $f(\alpha)$ для реализаций детерминированного биномиального каскада, полученные методом МФДФА

При оценивании рядов стохастических мультифрактальных каскадов метод ММВП показал оценки, намного уступающие по своим статистическим свойствам оценкам, полученными методом МФДФА в смысле большей близости к теоретическим значениям. Это очевидно при сравнении рисунков 4.15 и 4.16, где представлены выборочные функции, а так же при сравнении величин отклонений оценок от теоретических значений, приведенных в таблице 4.4.

Результаты численных исследований показывают, что характеристики, полученные методом ММВП, менее устойчивые и имеют больший разброс значений. Однако, изучение вейвлет-спектра и линий локальных максимумов исследуемого фрактального временного ряда позволяет сделать дополнительные выводы о локальных особенностях структуры ряда и улучшить выборочные характеристики. Таким образом, при исследовании неизвестного временного ряда, метод МФДФА должен быть использован в первую очередь, а затем мультифрактальная структура может быть исследована более детально методом ММВП.

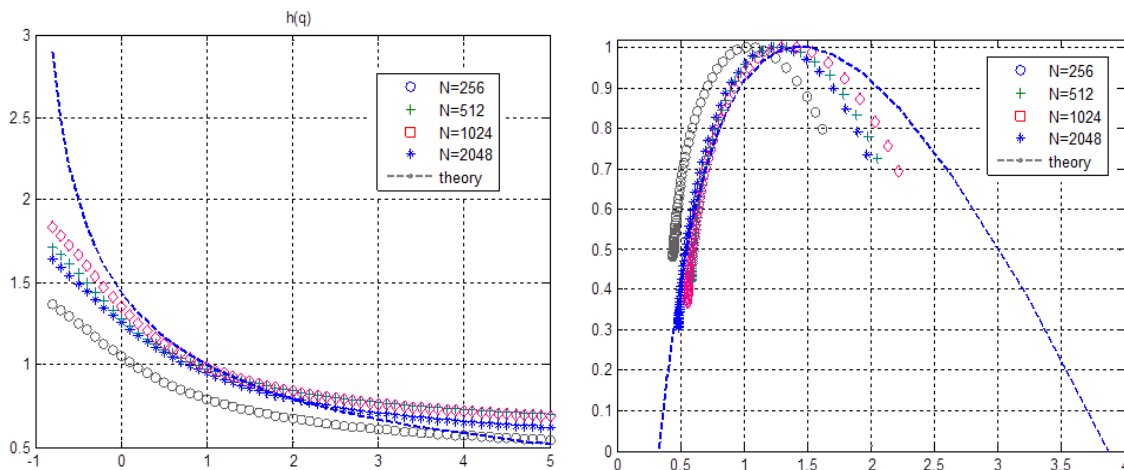


Рисунок 4.16 – Выборочные функции $h(q)$ и $f(\alpha)$ для реализаций детерминированного биномиального каскада, полученные методом ММВП

В таблице 4.4 приведены отклонения выборочных функций от теоретических значений, которые показывают определенные преимущества метода МФДФА, при анализе процессов с непрерывным мультифрактальным спектром.

На рис. 4.17 представлены усредненные выборочные функции $h(q)$, полученные методами МФДФА и ММВП для реализаций фрактального броуновского движения (а) и детерминированного мультифрактального каскада (б). Длина реализаций составляла 1024 отсчета.

Таблица 4.4 – Отклонения для реализаций стохастического каскада

Длина ряда	Метод	ΔH	$\Delta h (q < 0)$	$\Delta h (q > 0)$
256	ММВП	0.12	0.8	0.11
	МФДФА	0.007	0.18	0.023
512	ММВП	0.045	0.5	0.09
	МФДФА	0.029	0.14	0.012
1024	ММВП	0.003	0.56	0.057
	МФДФА	0.015	0.16	0.017
2048	ММВП	0.04	0.4	0.081
	МФДФА	0.029	0.18	0.02

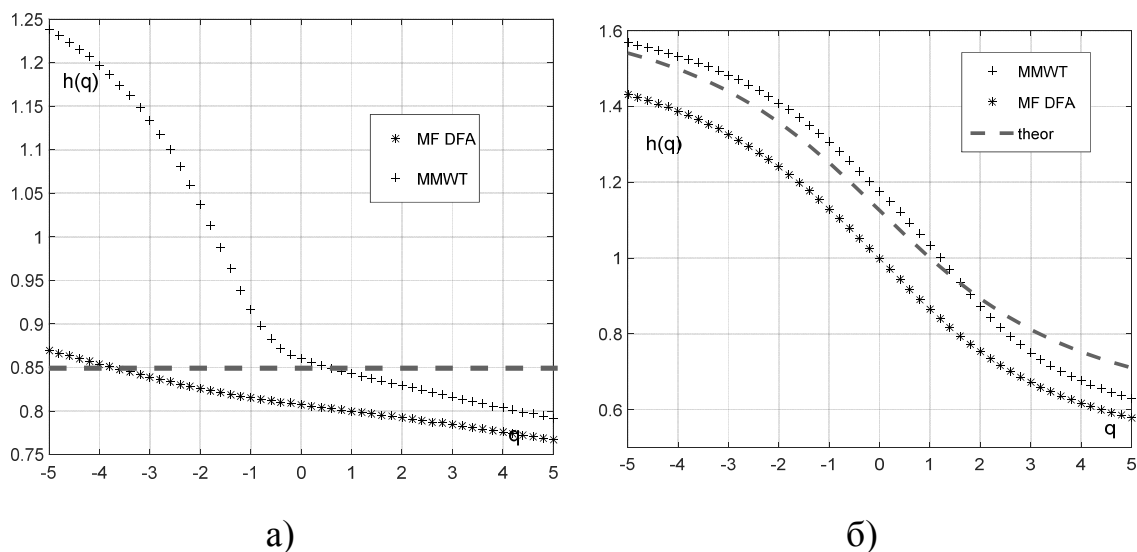


Рисунок 4.17– Выборочные функции $h(q)$ для монофрактальных (а) и мультифрактальных реализаций (б)

4.5 Определения свойств монофрактальности и мультифрактальности по выборочным фрактальным характеристикам

Приведенные выше результаты мультифрактального анализа модельных временных рядов демонстрируют необходимость разработки инструмента, позволяющего различать моно- и мультифрактальные реализации. В работе [Kirichenko 2014] предлагается метод, позволяющий принимать или отвергать гипотезу о наличии монофрактальных свойств ряда на основе исследования выборочных значений обобщенного показателя Херста, полученных методом МФДФА.

Для самоподобных процессов вопрос о законе распределения оценок H был рассмотрен в ряде работ, где было показано, численно или аналитически, что оценки являются нормальными случайными величинами. В работе были исследованы законы распределения оценок $h(q)$ при разных значениях параметра q . Проведенный анализ

выборочных законов распределения $h(q)$ показал, что при $q > 0$ оценки $h(q)$ имеют нормальное распределение, параметры которого зависят от значения q . Для $q < 0$ выборочные значения обобщенного показателя Херста в общем случае не являются нормально распределенными.

На рис. 4.18 представлены значения функции $h(q)$ ($0 \leq q \leq 5$) и гистограммы значений оценок $h(q)$, полученные по реализациям длиной 1024 значений для $q=1$ и $q=5$. Вверху приведены результаты для реализаций ФБД с параметром Херста $H=0.8$, внизу – для реализаций биномиального стохастического бета-каскада при значении $\alpha=1$.

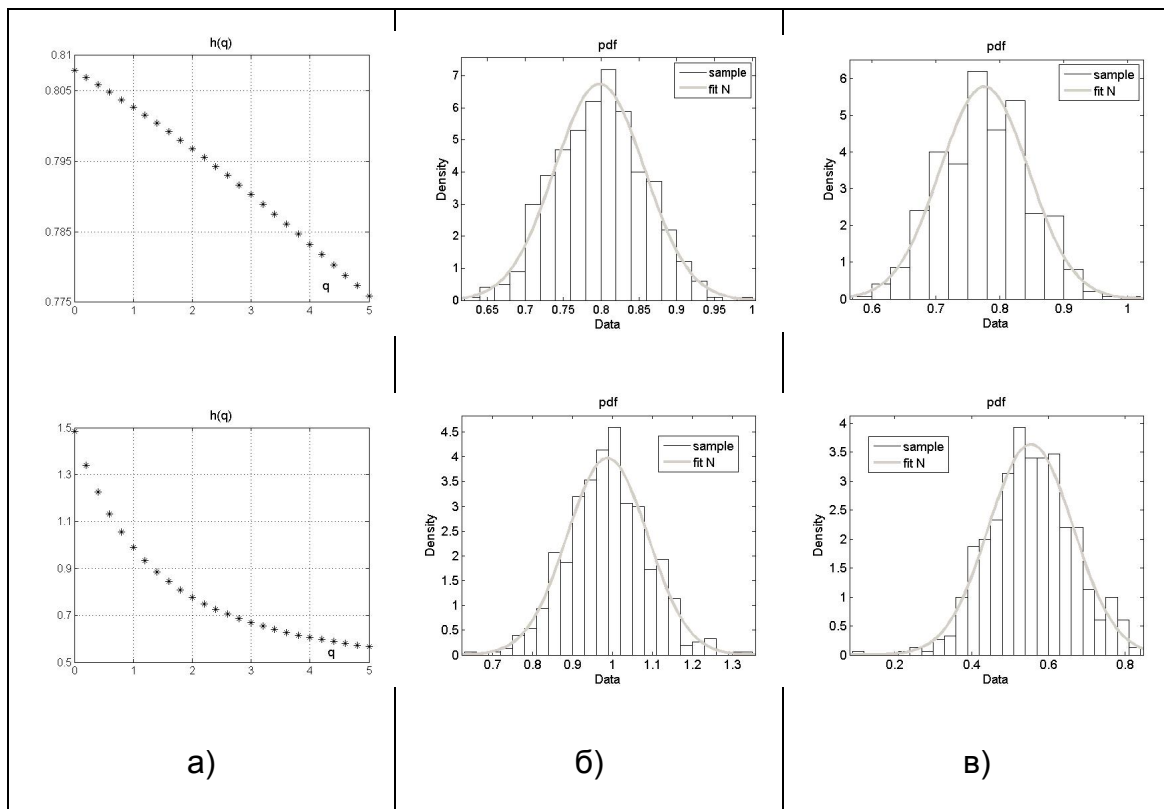


Рисунок 4.18 – Выборочные функции $h(q)$ (а); выборочные плотности распределений $h(q)$ при $q=1$ (б) и $q=5$ (в) для реализаций ФБД и реализаций стохастического каскада

Очевидно, что мультифрактальные процессы имеют гораздо больший перепад значений $\Delta h = h(q1) - h(q2)$. Случайная величина Δh при $q > 0$ имеет нормальное распределение $N(m_h, s_h)$, параметры которого зависят от длины реализации и выбранных значений величины q . Предложенный в работе критерий рассматривает величину $\Delta h = h(0.1) - h(5)$. Путем численного моделирования монофрактальных процессов с различной степенью самоподобия были получены выборочные значения m_h и s_h для рядов длины N , представленные в таблице 4.5. Там же приведены аналогичные характеристики, рассчитанные по реализациям каскадных процессов с разной степенью неоднородности, задаваемой параметром бета-распределения a .

Таблица 4.5 – Среднее значение и среднеквадратическое отклонение случайной величины Δh

	N=256		N=512		N=1024		N=2048	
	m_h	s_h	m_h	s_h	m_h	s_h	m_h	s_h
ФБД	0.075	0.052	0.05	0.038	0.035	0.026	0.03	0.022
Каскад								
a=1	0.87	0.23	0.86	0.18	0.85	0.16	0.82	0.12
a=5	0.32	0.13	0.29	0.095	0.28	0.08	0.27	0.07
a=10	0.23	0.1	0.2	0.07	0.18	0.06	0.17	0.05

Из таблицы видно, что даже при очень слабых мультифрактальных свойствах процесса можно различать моно- и мультифрактальные

реализации. Таким образом, значение случайной величины Δh можно использовать в качестве статистического критерия для принятия или отбрасывания гипотезы о наличии монофрактальных свойств временных рядов. В данном случае нулевой гипотезой является предположение о монофрактальности ряда с некоторым заданным уровнем значимости α . Получив оценку функции $\hat{h}(q)$ методом МФДА, вычисляется наблюдаемая величина $\Delta \hat{h} = \hat{h}(0.1) - \hat{h}(5)$. Гипотеза принимается с уровнем значимости α , если полученное значение попадает в область допустимых значений

$$m_h(N) - t_\alpha s_h(N) < \hat{h} < m_h(N) + t_\alpha s_h(N),$$

где N – длина реализации;

m_h и s_h – соответствующие значения, рассчитанные для монофрактального процесса;

α – уровень значимости;

t_α – квантиль стандартного нормального распределения.

4.6 Комплексный подход к оцениванию мультифрактальных свойств временных рядов малой длины

Подводя итоги исследований, представленных в 3-ем и 4-ом разделах, можно предложить следующую схему проведения мультифрактального анализа некоторого случайного процесса, представленного временным рядом длины N . Поскольку для применения аппарата вейвлет-преобразований необходимо соответствующее программное обеспечение и опыт работы, можно ограничиться методом МФДА.

1. Предварительное исследование структуры временного ряда является необходимым этапом мультифрактального анализа, полное его описание приведено в разделе 3. В этот этап входит

– определение интервалов различных скейлингов, проводимое с помощью построения зависимости $H(\tau) = f[\log \frac{R}{S}(\tau)]$ или флуктуационной

функции $F_{DFA}(\tau)$;

– выявление и удаление краткосрочной авторегрессионной зависимости;

– проверка гипотезы о наличии самоподобных свойств в широком смысле.

2. Оба рассмотренных метода предназначены для работы с нестационарными рядами. Но прежде чем приступить к оцениванию мультифрактальных свойств, необходимо исследовать его структуру с помощью построения корреляционной функции (спектральной плотности) и спектра вейвлет-энергии, которые позволяют выявить трендовые и циклические составляющие ряда.

3. При оценивании обобщенного показателя Херста методом МФДФА, необходимо сначала провести прикидочное оценивание показателя Херста $h(2)$, используя локальные полиномы увеличивающейся степени и определить наименьшую степень полинома, начиная с которой оценка показателя Херста перестает изменяться. После этого проводить оценивание функции $h(q)$, удаляя локальный полиномиальный тренд найденной степени. Пошаговый алгоритм оценивания мультифрактальных характеристик временного ряда методом МФДФА приведен в 4.2.

4. При оценивании скейлинговой экспоненты методом ММВП, необходимо сначала выбрать подходящий диапазон масштаба $a_1 \leq a \leq a_2$, на которых

определяются линии локальных экстремумов функции $W(a,b)$. Правильный выбор диапазона масштаба позволяет не учитывать влияние трендовых компонент ряда. Затем надо провести прикидочное оценивание частичной функции $Z(q,a)$, чтобы убедиться в наличии интервалов линейной зависимости $\log Z(q,a)$ от $\log a$. Пошаговый алгоритм оценивания мультифрактальных характеристик временного ряда методом ММВП приведен в 4.3.

5. При слабовыраженных мультифрактальных свойствах необходимо проверить гипотезу о наличии монофрактальных свойств временных рядов. Статистический критерий рассмотрен в подразделе 4.5.

6. Получить отдельно интервальную оценку показателя Херста $h(2)$.

7. Если оценки мультифрактальных характеристик были получены разными методами, то для увеличения точности необходимо провести их сравнительный анализ с учетом априорной информации о характеристиках исследуемого временного ряда и результатов численных исследований подраздела 4.4.

Выводы

1. Рассмотрены математические модели разных типов фрактальных стохастических процессов: монофрактальные, бифрактальные и мультифрактальные и их теоретические фрактальные характеристики. Показано, что данные модели можно использовать для тестирования

методов оценивания мультифрактальных характеристик по временным рядам малой длины.

2. Исследованы особенности численной реализации методов мультифрактального анализа, построенных на основе: детрендированного флуктуационного анализа и максимумов модулей непрерывного вейвлет-преобразования.

3. Проведено тестирование каждого метода на реализациях фрактальных процессов разных типов. Численно показано, что мультифрактальные характеристики (обобщенный показатель Херста, скейлинговая экспонента, функция мультифрактального спектра), полученные по выборкам конечной длины, имеют смещение, которое уменьшается с увеличением длины выборки. Показано, что метод мультифрактального детрендированного флуктуационного анализа имеет значительные преимущества в точности при оценивании характеристик процессов с дискретным мультифрактальным спектром.

4. Разработан метод, позволяющий принимать или отвергать гипотезу о наличии монофрактальных свойств ряда на основе исследования выборочных значений обобщенного показателя Херста, полученных методом мультифрактального детрендированного флуктуационного анализа.

5. Разработан комплексный подход к оцениванию мультифрактальных характеристик временных рядов и предложены практические рекомендации по реализации данного подхода.

Литература

- [Kantelhardt, 2002] Kantelhardt, J.W., Zschiegner, S.A., Bunde, A., Havlin, S., Koscielny-Bunde, E., Stanley, H.E. Multifractal detrended fluctuation analysis of non-stationary time series. *Physica A.*, № 316, 2002. pp. 87–114.
- [Kantelhardt, 2008] Kantelhardt, J. W. Fractal and Multifractal Time Series. [Электронный ресурс]: 2008.– Режим доступа: <http://arxiv.org/abs/0804.0747>.
- [Kirichenko, 2014] Kirichenko, L. The method of distinction monofractal and multifractal process from time series. *Системні технології*, №6 (95), 2014. С. 121-127.
- [Muzy, 1991] Muzy, J.F., Bacry, E., Arneodo, A. Wavelets and Multifractal Formalism for Singular Signals: Application to Turbulence Data. *Physical review letters.*, Vol. 67, 1991. pp. 3515–3518.
- [Muzy, 1993] Muzy, J.F., Bacry, E., Arneodo, A. Multifractal formalism for fractal signals: the structure-function approach versus the wavelet-transform modulus-maxima method. *Phys. Rev. E.* , Vol. 47, 1993. pp. 3515–3518.
- [Nakao, 2000] Nakao H Multi-scaling properties of truncated Levy flights. *Phys. Lett. A.*, Vol. 266, 2000. pp. 282–289.
- [Oswiecimka, 2006] Oswiecimka, P., Kwapin, J., Drozd, S. Wavelet versus detrended fluctuation analysis of multifractal structures. *Physical Review E: Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, Vol. 74, 2006. pp. 161-203.
- [Riedi, 2002] Riedi, R.H. Multifractal processes, in Doukhan P., Oppenheim G., Taqqu M.S. (Eds.), *Long Range Dependence: Theory and Applications*, Birkhuser, 2002. pp. 625–715.
- [Кириченко, 2011, 1] Кириченко, Л. О. Исследование выборочных характеристик, полученных методом мультифрактального флуктуационного анализа. *Вісник НТУУ «КПІ». Інформатика, управління та обчислювальна техніка: зб. наук. пр.*, № 54, 2011. С.101–111.

[Кириченко, 2011, 2] Кириченко, Л. О. Сравнительный мультифрактальный анализ временных рядов методами детрендированного флуктуационного анализа и максимумов модулей вейвлет-преобразования. Автоматизированные системы управления и приборы автоматики, Вып. 157, 2011. С.66–77.

[Павлов, 2007] Павлов, А. Н., Анищенко, В. С. Мультифрактальный анализ сигналов на основе вейвлет-преобразования. Известия Саратовского университета. Сер. Физика, Т. 7, Вып. 1, 2007. С.1–18.

Информация об авторах



Людмила Кириченко – д.т.н., профессор Харьковского национального университета радиозлектроники; пр. Науки 14, 61166, Харьков, Украина; e-mail: lyudmyla.kirichenko@nure.ua

Основные области научных исследований: самоподобные и мультифрактальные временные ряды, фрактальный анализ, вейвлет-анализ, детерминированные хаотические системы.



Тамара Радивилова – к.т.н., доцент Харьковского национального университета радиозлектроники; пр. Науки 14, 61166, Харьков, Украина; e-mail: tamara.radivilova@gmail.com

Основные области научных исследований: самоподобные и мультифрактальные временные ряды, телекоммуникационные системы, управление трафиком, информационная безопасность.

ФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РЕАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Людмила Кириченко, Тамара Радивилова

Разработанные методы исследования самоподобных и мультифрактальных процессов могут быть использованы для моделирования и анализа технических, экономических и других систем, обладающих самоподобными и мультифрактальными свойствами, мониторинга, диагностики и прогнозирования критических явлений для временных рядов различной природы. В данном разделе представлено практическое приложения предложенных методов и моделей в области телекоммуникационных систем, финансовых рынков, биомедицинских сигналов, социальных сетей и некоторых природных явлений.

5.1 Оценивание показателя Херста

Во многих случаях основная динамика системы полностью определяется одной характеристикой самоподобия - показателем Херста. В этом разделе приведены результаты фрактального анализа, связанные с оцениванием показателя Херста для временных рядов различной природы.

5.1.1 Исследование самоподобных свойств реализаций инфокоммуникационных трафиков

Многочисленные исследования процессов в сети Интернет показали, что статистические характеристики трафика обладают свойством временной масштабной инвариантности (самоподобием) [Leland, 1994; Willinger, 1996; Crovella, 1997; Park, 2000; Ryu, 2001; Sheluchin, 2007; Шелухин, 2011]. Причина такого эффекта - в особенностях распределения файлов по

серверам, их размерах, а также в типичном поведении пользователей. Оказалось, что изначально не проявляющие свойств самоподобия потоки данных, пройдя обработку на узловых серверах и активных сетевых элементах, начинают подавать ярко выраженные признаки самоподобия. Самоподобный трафик имеет особую структуру, сохраняющуюся на многих масштабах – в реализации всегда присутствует некоторое количество очень больших выбросов при относительно небольшом среднем уровне трафика. Эти выбросы вызывают значительные задержки и потери пакетов, даже когда суммарная потребность всех потоков далека от максимально допустимых значений. В классическом случае для пуассоновского входного потока будет достаточно буферов умеренного размера: очередь может образоваться в краткосрочной перспективе, но за долгий период времени буферы очистятся. Однако при самоподобной нагрузке образуются очереди гораздо большей длины, что приводит к перегрузке сети [Митилино, 2001].

В работе [Кириченко, 2006] рассмотрен ряд реализаций сетевого трафика протокола TCP. На рис. 5.1 представлена типичная реализация трафика, агрегированная по разным уровням (1.8). Очевидно, что структура временного ряда при агрегировании сохраняется.

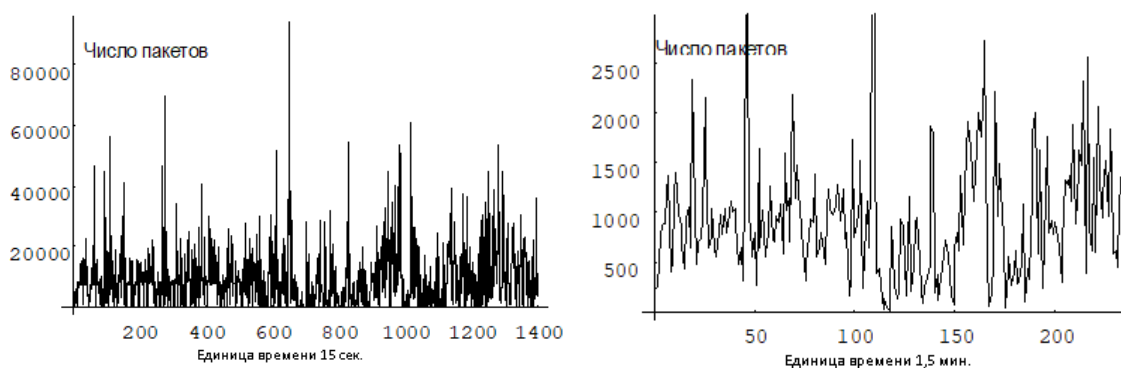


Рисунок 5.1 – Временная реализация трафика, агрегированная по уровню 15 сек и 1,5 мин.

На рис. 5.2 представлены три фрагмента типичных реализаций реального сетевого трафика, демонстрирующие свойства самоподобия и долгосрочной зависимости. Две реализации (TCP – 1.1, TCP – 1.2) были получены при анализе трафика одного протокола (TCP) на одной и той же сети в разное время с разным уровнем нагрузки сети. Реализация TCP/Voip – 1 представляет собой трафик протоколов TCP и Voip и получена на другой сети. Для проведения исследований использовались временные ряды длиной 3000 значений, полученные при уровне агрегации 15 сек.

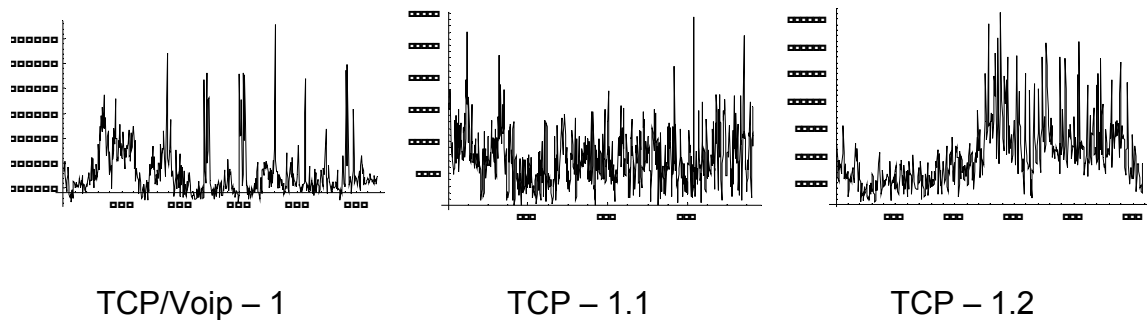


Рисунок 5.2 – Реализации трафиков

R/S -анализ изменения показателя Херста, представленный на рис. 5.3, показал следующие характерные особенности реализаций:

Долгосрочную зависимость. Параметр Херста во всех случаях значительно больше 0,5.

Отсутствие циклических составляющих для реализаций TCP – 1.1 и TCP – 1.2. В случае TCP/Voip – 1 прослеживается наличие нерегулярного цикла периодом $n \approx 80$, что соответствует характерным всплескам на временной реализации.

Краткосрочную зависимость. Во всех исследуемых реализациях была выявлена сильная авторегрессионная зависимость. После удаления краткосрочной зависимости показатели Херста уменьшились, оставаясь при этом больше 0,5. Таким образом, можно сделать вывод, что реализации обладают истинной долгосрочной зависимостью.

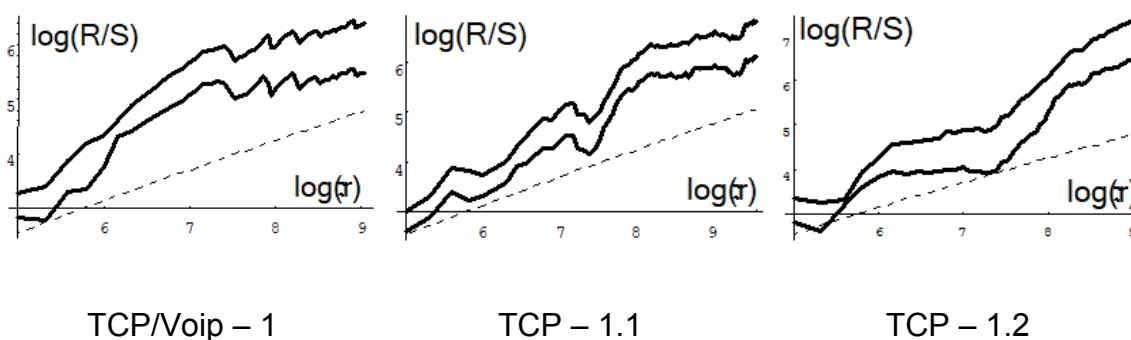


Рисунок 5.3 – Линия 1: первоначальный процесс, линия 2: процесс с удаленной краткосрочной зависимостью.

В таблице 5.1 приведены значения параметра Херста до и после удаления краткосрочной зависимости, а также коэффициенты авторегрессии 1-го порядка для рассмотренных реализаций.

Таблица 5.1 - Значения параметра Херста до и после удаления краткосрочной зависимости и коэффициенты авторегрессии

Реализации трафика	Первоначальный H	H без краткосрочной зависимости	Коэффициенты авторегрессии
TCP/Voip – 1	0.72	0.61	0.6
TCP – 1.1	0.8	0.73	0.41
TCP – 1.2	0.98	0.95	0.55

5.1.2 Исследование фрактальных свойств нестационарных кумулятивных временных рядов с несколькими циклическими составляющими и наличием краткосрочной зависимости

В работе [Дейнеко, 2010] предложен метод исследования фрактальной структуры для кумулятивных рядов, обладающих несколькими циклическими компонентами разных периодов и возможной краткосрочной зависимостью, имеющих стационарные приращения. Такие ряды порождаются различными экономическими и финансовыми процессами.

Продемонстрируем применение данного метода на примере ряда посуточного потребления электроэнергии за период с 06.01.2003 года по 06.01.2010 года, содержащий 2554 наблюдения (рисунок 5.4). Наблюдая временную реализацию, сразу можно отметить ярко выраженную сезонность зима – лето, наличие тенденции возрастания потребления электричества до 2009 года и резкий спад в начале 2009 года, который соответствует мировому финансовому кризису.

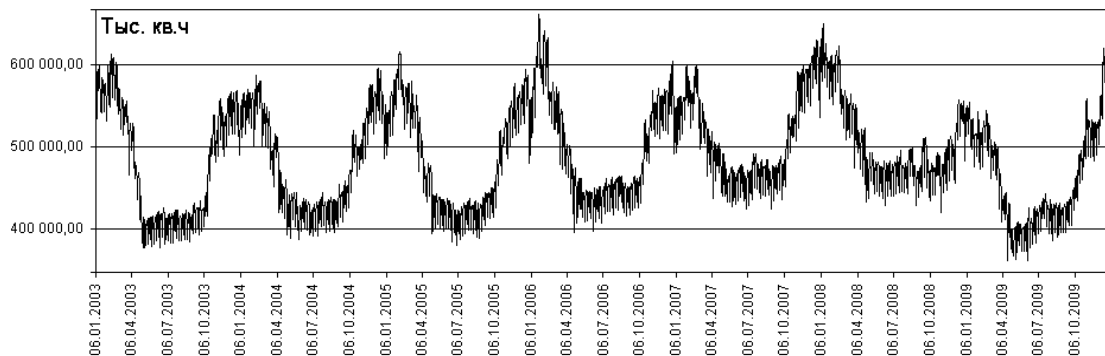


Рисунок 5.4 – Динамика посуточного потребления электроэнергии по Украине

Начнем исследование структуры ряда потребления электроэнергии с построения ряда 1-ой разности $D(-1)$. Процедура взятия 1-ой разности равноценна удалению авторегрессионной зависимости и линейного тренда, и часто позволяет получить ряд, стационарный в широком смысле.

Автокорреляционная функция данного ряда, показанная на рисунке 5.5 слева, демонстрирует всплески, которые соответствуют семидневной периодичности. Недельная цикличность естественна для потребления электричества.

Проведем RS -анализ изменения показателя Херста $H(n)$ в зависимости от длины n временного ряда $D(-1)$. График в двойном логарифмическом масштабе для RS -анализа показан на рис. 5.5 справа. На графике R/S -зависимости ясно видны циклы, соответствующие ежемесячной повторяемости. Прямой линией показан участок, на котором прослеживается долгосрочная зависимость с показателем Херста $H = 0,54$. Начиная со значения $n \approx 365$, которое соответствует годовому циклу, RS -зависимость демонстрирует периодические составляющие, которые соответствуют сезонным циклам различной длины.

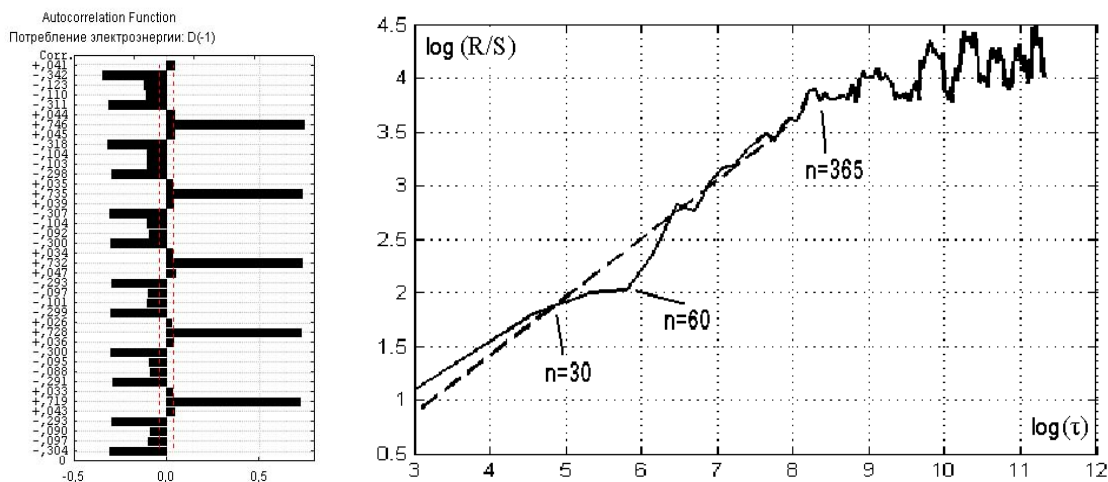


Рисунок 5.5 – Корреляционная функция ряда $D(-1)$ и соответствующая RS -зависимость, $H = 0,54$ для ряда потребления э/э

При проведении RS -анализа 7-дневная цикличность мешает корректному вычислению степени долгосрочной зависимости. В этом случае можно удалить цикличность путем построения ряда разности с лагом 7 $D(-7)$. Соответствующая автокорреляционная функция показана на рисунке 5.6

слева. Корреляционная функция демонстрирует отсутствие периодических составляющих, кратных 7-дневному циклу. Однако ее постепенный спад говорит о наличии авторегрессионной составляющей процесса.

Проведем RS -анализ изменения показателя Херста $H(n)$ для временного ряда $D(-7)$. График R/S - зависимости в двойном логарифмическом масштабе показан на рисунке 5.6 справа. Прямой пунктирной линией на линии 1 показан участок, на котором прослеживается долгосрочная зависимость с показателем Херста $H = 0,86$. Однако столь высокий показатель может объясняться наличием краткосрочной зависимости. Для устранения краткосрочной зависимости надо найти линейную зависимость между значениями ряда в точках t и соответствующими значениями в точках $t-1$. Анализ ряда $D(-7)$ показал наличие авторегрессионной зависимости с коэффициентом авторегрессии, равным 0,79. Линией 2 изображен график R/S - зависимости для ряда $D(-7)$ с удаленной авторегрессией. Показатель Херста снизился до значения $H = 0,56$, что близко к значению, полученному ранее для ряда $D(-1)$.

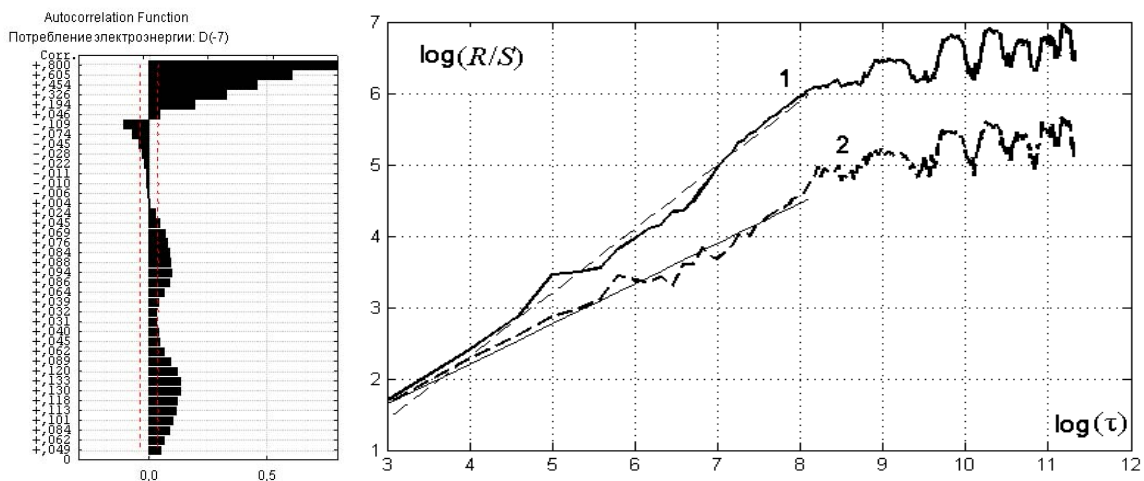


Рисунок 5.6. – Корреляционная функция ряда потребления э/э $D(-7)$ и соответствующие RS -зависимости: 1 – данные без удаления авторегрессии, $H = 0,86$; 2 – с удалением авторегрессии, $H = 0,56$

Таким образом, анализ временного ряда посуточного потребления электроэнергии в Украине показал наличие долгосрочной зависимости с показателем Херста $H = 0,56$. Временной интервал, на котором прослеживается долгосрочная зависимость, лежит в диапазоне от 7 до 365 дней.

5.1.3 Фрактальный анализ электроэнцефалограмм для состояний бодрствования и сна

В работе [Кириченко, 2010 (1)] исследованы ЭЭГ-сигналы лабораторных животных. Сигналы были разбиты на фазы бодрствования и сна (медленного и парадоксального). Методом ДФА был проведен сравнительный анализ степени самоподобия временных рядов энцефалограмм для разных фаз состояний животных.

Исследования временных рядов энцефалограмм показали наличие как долгосрочной, так и краткосрочной памяти. На рисунке 5.7 представлены типичные реализации ЭЭГ лабораторных крыс в разных фазах бодрствования и сна, и соответствующие им графики зависимости флуктуационной функции $F(\tau)$ от числа отсчетов τ в логарифмическом масштабе. Верхняя линия соответствует необработанным исходным данным, а нижняя получена после удаления авторегрессионной составляющей. Приведены значения показателя Херста, полученные до (H_1) и после (H_2) устранения краткосрочной зависимости.

Очевидно, что краткосрочная зависимость увеличивает значения показателя Херста и демонстрирует эффект долговременной памяти. После удаления авторегрессионной составляющей значения показателя Херста уменьшились. Как показал фрактальный анализ, несомненная долгосрочная зависимость ($H > 0.6$) сохраняется для временных рядов фазы бодрствования. Для фазы парадоксального сна значения показателя Херста лежат в диапазоне $0.5 < H < 0.55$, что позволяет сомневаться в наличии долгосрочной памяти, однако дополнительные исследования это

подтверждают. Фаза медленного сна характеризуется антиперсистентностью, для которой $0.35 < H < 0.5$.

Проведенные исследования позволяют предположить, что оценивание показателя Херста позволяет определять физиологическое состояние животного в режиме реального времени. Однако метод ДФА, первоначально примененный для определения степени самоподобия ЭЭГ, является слишком медленным для работы в реальном времени. Оптимально в этом случае использовать метод оценивания, основанный на быстром вейвлет-преобразовании.

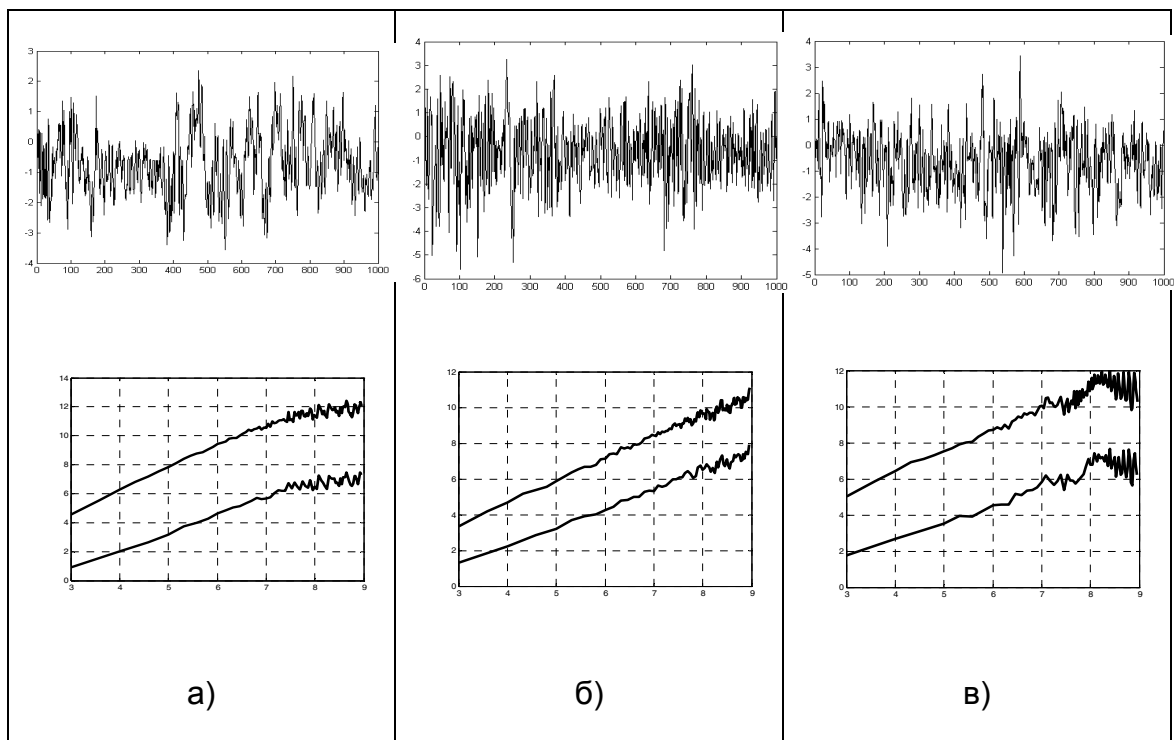


Рисунок 5.7 – Реализации ЭЭГ и соответствующие им графики $F(\tau)$:

а) бодрствование, $H_1 = 0.78$, $H_2 = 0.63$; б) парадоксальный сон,

$H_1 = 0.67$, $H_2 = 0.54$; в) медленный сон $H_1 = 0.59$, $H_2 = 0.46$

Расчет показателя Херста для каждой фазы поведения животного, основанный на дискретном вейвлет-преобразовании демонстрирует рис. 5.8. Для оценивания динамики показателя Херста был применен метод

«скользящего окна», состоящий в следующем. В исследуемом временном ряде выделяется последовательность значений (окно), и для этих данных вычисляется показатель Херста H . Далее окно передвигается вправо вдоль ряда на заданную величину сдвига Δt . Повторяя эту процедуру для выбранного периода времени, получаем локальные значения показателя Херста. При этом параметр H в момент времени t определяется значениями ряда за период Δt значений, предшествующими этому моменту.

С помощью данного метода была исследована фрактальная структура энцефалограммы крысы в разных состояниях сна и бодрствования (рисунок 5.9). Вся энцефалограмма состояла из различных фаз поведения лабораторного животного: awake – фаза бодрствования животного, sws – медленный сон, het – парадоксальный сон. Частота оцифровки сигнала равнялась 64 Гц. Энцефалограмма, содержала порядка 220000 отсчетов, размер «окна» задавался равным 1024 отсчетов.

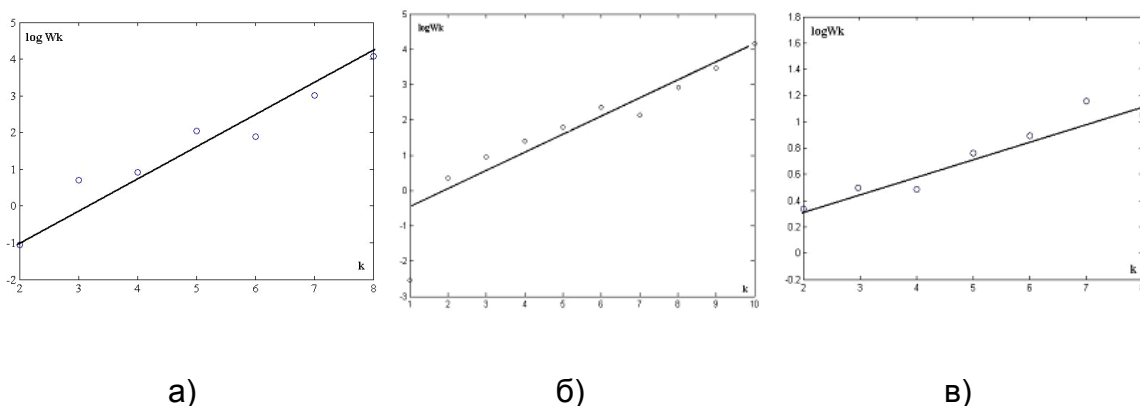


Рисунок 5.8 – Зависимость логарифма вейвлет-энергии от номера уровня:
 а) бодрствование, $0.6 < H < 0.9$; б) парадоксальный сон, $0.5 < H < 0.55$;
 в) медленный сон $0.35 < H < 0.5$

Динамика показателя Херста для участка энцефалограммы, полученное методом «скользящего окна», приведена на рисунке 5.9. Количество «скользящих окон», по которым оценивался показатель H обозначено n ,

пунктирными линиями показана область смены состояния исследуемого животного. На графике прослеживаются временные моменты, где резко меняется показатель Херста, т.е. не видя самого исследуемого животного, можно определить переход из одного состояния в другое.

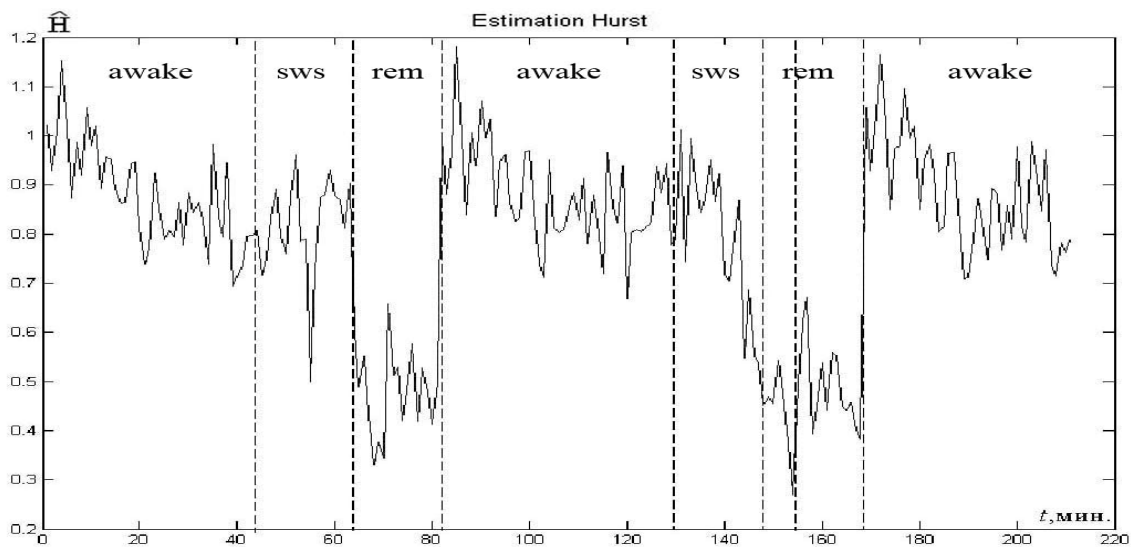


Рисунок 5.9 – Определение изменения фрактальной структуры энцефалограммы

5.1.4 Применение фрактального анализа для обнаружения разладки финансовых временных рядов

Одним из основных положений анализа временных рядов является предположение об устойчивых или слабо изменяющихся свойствах того механизма, который порождает данный временной ряд, поэтому многие проблемы экономической и технической сфер сводятся к обнаружению резких изменений (разладки) вероятностных характеристик анализируемого временного ряда. Разладка представляет собой нарушение закономерности в динамике или структуре временного ряда и может служить предвестником критических явлений.

Под стабильным понимается рынок, на котором все участники могут осуществлять операции друг с другом, подвергаясь одинаковым рискам, в зависимости от присущих каждому участнику шкалы времени и

инвестиционного горизонта. Рынок остается стабильным, потому что он не имеет характерного масштаба времени. Когда весь инвестиционный горизонт рынка сокращается (инвесторы потеряли веру в долгосрочную информацию), рынок становится беспорядочным и нестабильным. Следовательно, рынок является стабильным, пока он сохраняет свою фрактальную структуру. Когда он теряет такую структуру, наступает нестабильность. [Петерс, 2004]

В работе [Кириченко, 2009] представлено обнаружение разладки фрактальных свойств финансовых временных рядов, которая является предвестником кризисных состояний. Наиболее адекватным математическим аппаратом для исследования сложного поведения финансовых рядов является фрактальный анализ, особое значение которого состоит в том, что он учитывает поведение системы не только в период измерений, но и его предысторию. Фрактальная размерность D , как элемент фрактального анализа, является показателем сложности динамики ряда, и ее изменение может служить индикатором разладки временного ряда.

Для временных рядов фрактальная размерность D обычно вычисляется на основе расчета показателя Херста H , который связан с фрактальной размерностью соотношением $D = 2 - H$ [Федер, 1991]. Существует много методов нахождения показателя Херста; метод нормированного размаха является одним из наиболее часто используемых на практике. При значениях $0.5 < H < 1$ ряд демонстрирует персистентное (трендоустойчивое) поведение. Т.е., если ряд возрастает (убывает) в предыдущий период, то с вероятностью, тем большей, чем показатель Херста больше 0.5, он будет сохранять эту тенденцию такое же время в будущем. Значение $H = 0.5$ указывает на независимость (отсутствие какой-либо памяти о прошлом) значений временного ряда. Чем ближе H к 0.5, тем более зашумлен ряд и тем менее выражен его тренд. Диапазон $0 < H < 0.5$ соответствует антиперсистентным рядам: если система демонстрирует рост в предыдущий период, то с вероятностью, тем

большей, чем показатель Херста меньше 0.5, в следующем периоде начнется спад.

Гипотеза фрактального рынка предполагает наличие памяти, следовательно, соответствующие временные финансовые ряды имеют тренды и фрактальную размерность $1 < D < 1.5$. Во время финансовых кризисов происходит сужение инвестиционных горизонтов, т.е. потеря памяти, фрактальная структура разрушается и фрактальная размерность становится $D \geq 1.5$. Анализируя возникновение участков с различной фрактальной размерностью, можно диагностировать и прогнозировать нестабильные состояния (кризисы).

Для исследования динамики фрактальной размерности был применен метод «скользящего окна», который состоит в следующем. В исследуемом временном ряде выделяется последовательность значений (окно), и для этих данных вычисляется фрактальная размерность D . Далее окно передвигается вправо вдоль ряда на заданную величину сдвига Δt , и снова вычисляется фрактальная размерность. Повторяя эту процедуру для выбранного периода времени, получаем локальные значения фрактальной размерности. При этом фрактальная размерность в момент времени t определяется значениями ряда за период Δt значений, предшествующими этому моменту.

В данной работе проведены численные исследования фрактальной динамики наиболее значимых макроэкономических финансовых показателей (индексы NASDAQ Composite, S&P 500, Dow Jones и др.) и курсов различных валютных пар за период с марта 2005 по июнь 2009 г. На рис.5.10 (а) показана динамика индекса Dow Jones в днях и соответствующие значения фрактальной размерности D . Из графиков видно, что изменение фрактальной структуры ряда произошло почти за полгода до начала падения показателя. Данная динамика характерна для всех рассмотренных рынков ценных бумаг, которые «обвалились» в результате кризиса 2008 г. Таким образом, можно сказать, что фрактальный анализ выявляет «скрытые» нарушения функционирования

рынка, которые могут продолжаться достаточно долго, но, в конечном счете, выливаются в полномасштабный кризис.

Аналогичные исследования, проведенные для курсов валют, так же показали скачок фрактальной размерности задолго до наступления критической ситуации. На рис. 5.10 (б) приведена дневная динамика отношения евро к гривне по курсу Национального Банка Украины и соответствующие значения фрактальной размерности D . Следует отметить, что для валютных рынков «запаздывание» между скачком D и резким изменением курса значительно меньше, чем для рынков акций. Это объясняется тем, что они менее персистентны, и, следовательно, менее инерционны.

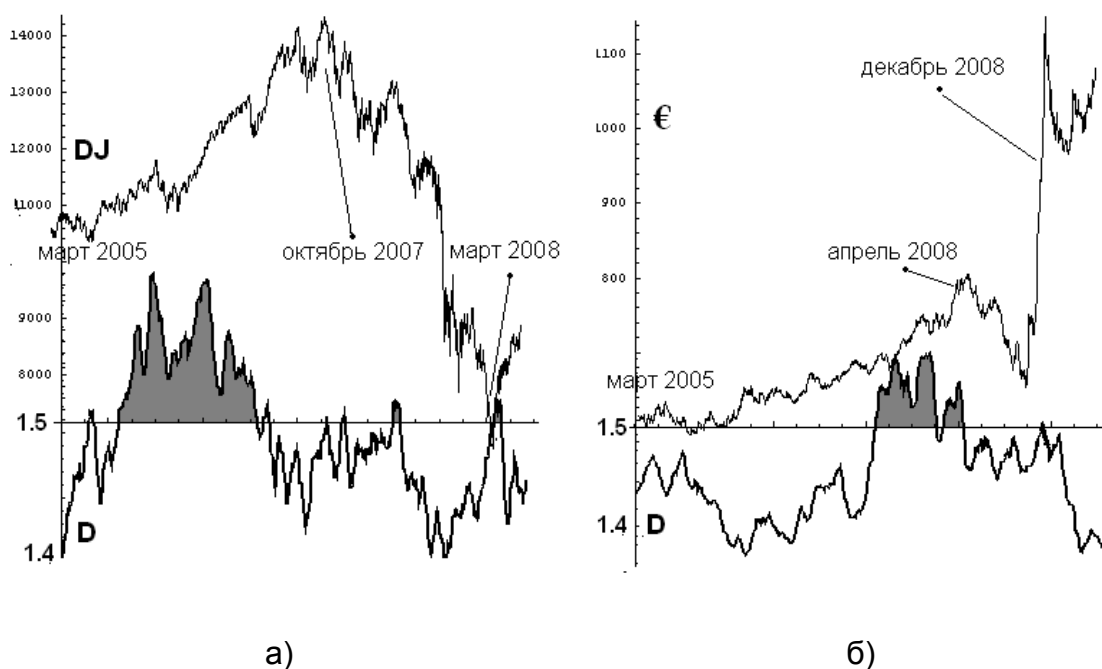


Рисунок 5.10 – Динамика фрактальной размерности

5.2 Мультифрактальный анализ

Изменения мультифрактальных характеристик дают большую информацию о динамике системы, чем один показатель Херста. В этом

разделе приведены результаты мультифрактального анализа для временных рядов различной природы.

5.2.1 Прогнозирования кризисных явлений для фрактальных финансовых временных рядов

Одним из примеров фрактальных стохастических структур являются современные финансовые рынки, для которых характерен эффект памяти, когда изменение цены зависит от величины предыдущего изменения. Гипотеза фрактальности финансовых временных рядов предполагает, что рынок представляет собой саморегулируемую макроэкономическую систему с обратной связью, в рамках которой действуют инвесторы с различными инвестиционными горизонтами, использующие информацию о прошлых событиях, влияющих на решения в настоящем, и содержащую долговременные корреляции и тренды [Петерс, 2000; Петерс, 2004; Cont, 2004; Dabi-Prashad, 2009].

Исследование фрактальной структуры финансовых рынков показывает, что значение параметра Херста на разных временных шкалах может отличаться, то есть в диапазоне минут временной ряд может быть антиперсистентным, а в диапазоне месяцев – персистентным. Более эффективным и универсальным инструментом анализа нестабильных финансовых систем является мультифрактальную модель, в соответствии с которой финансовые временные ряды представляются объединением множества монофракталов [Ganchuk, 2006; Calvet, 1997].

В данном подразделе представлено применение методов оконного анализа для отслеживания возникновения участков с различной мультифрактальной структурой для диагностики и прогнозирования нестабильных состояний (кризисов) рынка.

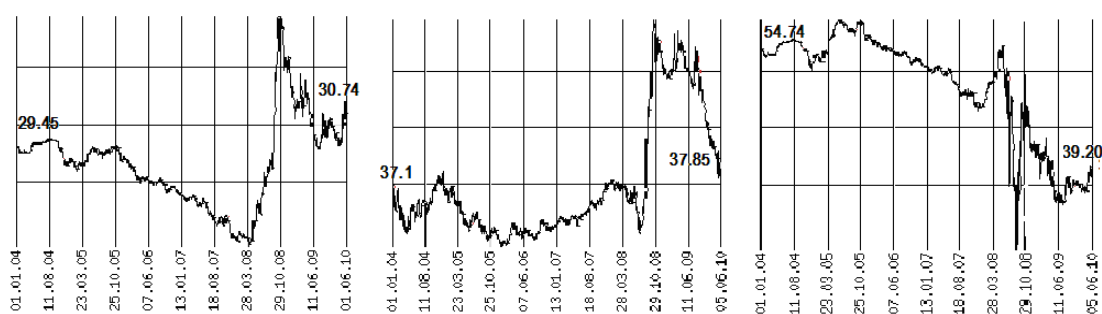
Мультифрактальный анализ предкризисных состояний рынка

В работе [Кириченко, 2010 (2)] представлен сравнительный анализ мультифрактальной структуры финансовых временных рядов до и после начала финансового кризиса 2008 года и выявление целесообразности

использования такого анализа для текущей диагностики стабильности экономических систем.

Проведем сравнительный мультифрактальный анализ МФДФА временных рядов обменных курсов валют до и после начала финансового кризиса 2008 года, представленных на специализированном сайте. В качестве примеров рассмотрим динамику изменения курса доллара США к российскому рублю, евро к рублю и котировок украинской гривны к российскому рублю в период с 01.01.2004 по 01.06.2010, представленную на рисунке 5.11 (а, б, в).

Характерная особенность всех приведенных графиков состоит в наличии участка, обнаруживающего большие изменения разности курса. Эти изменения отражают финансовый кризис, разразившийся в 2008 году, когда стоимость доллара и евро по отношению к рублю и гривне резко возросла.



а) доллар США/рубль

б) евро/рубль

в) гривна/рубль

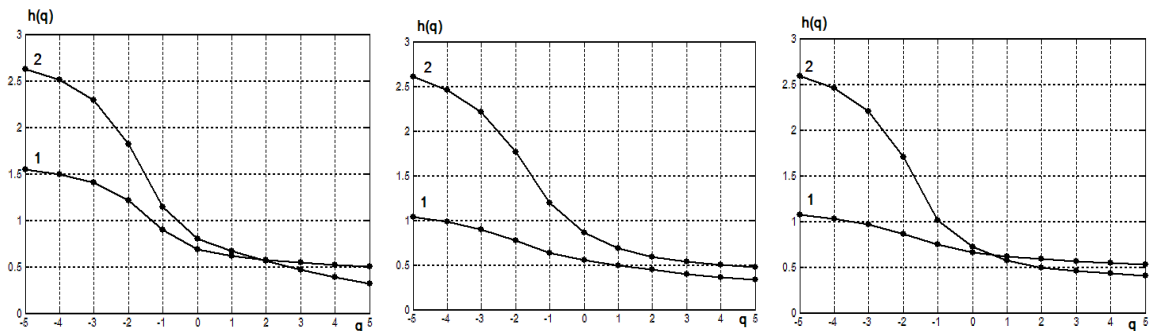
Рисунок 5.11 – Динамика котировок в период с 01.01.2004 по 01.06.2010

Следуя методу МФДФА, рассмотрим влияние этого кризиса на мультифрактальные свойства исследуемых временных рядов. С этой целью для каждого ряда проведем отдельный анализ двух участков, один из которых предшествует кризису (период с 01.01.2004 по 30.12.2007), а другой следует после пиковой фазы (период с 21.05.09 по 01.06.10). Период наиболее острой фазы кризиса исключен нами из рассмотрения как непредсказуемый.

Рассчитаем обобщенный показатель Херста $h(q)$ и отдельно рассмотрим обычный показатель Херста $H = h(2)$. Графики функций $h(q)$ представлены на рисунке 5.11. Наличие нелинейной зависимости у всех функций говорит о том, что показатель Херста изменяется при изменении параметра q , и является подтверждением тому, что временной ряд колебания курса валют является мультифрактальным.

В предкризисный период все временные ряды демонстрируют только слабые временные корреляции. Обобщенный показатель Херста лежит в диапазоне $0.4 < h(q) < 1.6$. Обычный показатель Херста $H = h(2)$ в этот период близок к 0.5. С экономической точки зрения это означает сокращение инвестиционного горизонта рынка, который становится беспорядочным и нестабильным.

Из зависимостей, приведенных на рисунке 5.12, видно, что после пика кризиса обобщенный показатель Херста $h(q)$ для всех финансовых рядов приобретает более широкий интервал изменения $0.2 < h(q) < 2.8$. Это свидетельствует об усилении мультифрактальных свойств и появлении более сильных корреляций.



а) доллар США/рубль

б) евро/рубль

в) гривна/рубль

Рисунок 5.12 – Обобщенный показатель Херста для рядов котировок до (линия 1) и после (линия 2) начала кризиса

Экономически это выражается в том, что стоимость валюты приобретает сильную чувствительность к изменению экономических, социальных, политических и прочих факторов. Обычный показатель Херста $H = h(2)$ в этот период больше 0.5. Пройдя пик финансового кризиса, временной ряд обменного курса становится персистентным, что характерно для финансовых временных рядов при стабильном рынке.

Оконный мультифрактальный анализ кризисных состояний рынка

Для исследования динамики обобщенного показателя Херста был применен метод «скользящего окна», который состоит в следующем. В исследуемом временном ряде выделяется последовательность значений (окно), и для этих данных вычисляются значения обобщенного показателя Херста $h(q)$ для значений параметра $q = \{-5, 2, 5\}$. Далее окно передвигается вправо вдоль ряда на заданную величину сдвига Δt , и снова вычисляется $h(q)$. Повторяя эту процедуру для выбранного периода времени, получаем локальные значения обобщенного показателя Херста при $q = -5$ характеризующие динамику сегментов, проявляющих малые флуктуации, при $q = 5$ характеризующие динамику сегментов, проявляющих большие флуктуации. Значение $H = h(2)$ характеризует персистентность финансового ряда. При этом мультифрактальные характеристики, полученные в момент времени t , определяются значениями ряда за период Δt значений, предшествующими этому моменту. На рисунке 5.13 вверху представлен временной ряд котировок доллар США/рубль с 2006 г. по 2009 г. Ниже приведена динамика показателя $h(q)$. Очевидно, что в предкризисный период с мая по ноябрь 2008, происходит сближение границ мультифрактального спектра (в данном случае значений $h(-5)$ – линия 1, и $h(5)$ – линия 3). Показатель Херста H (линия 2) при этом становится близок к значению 0.5

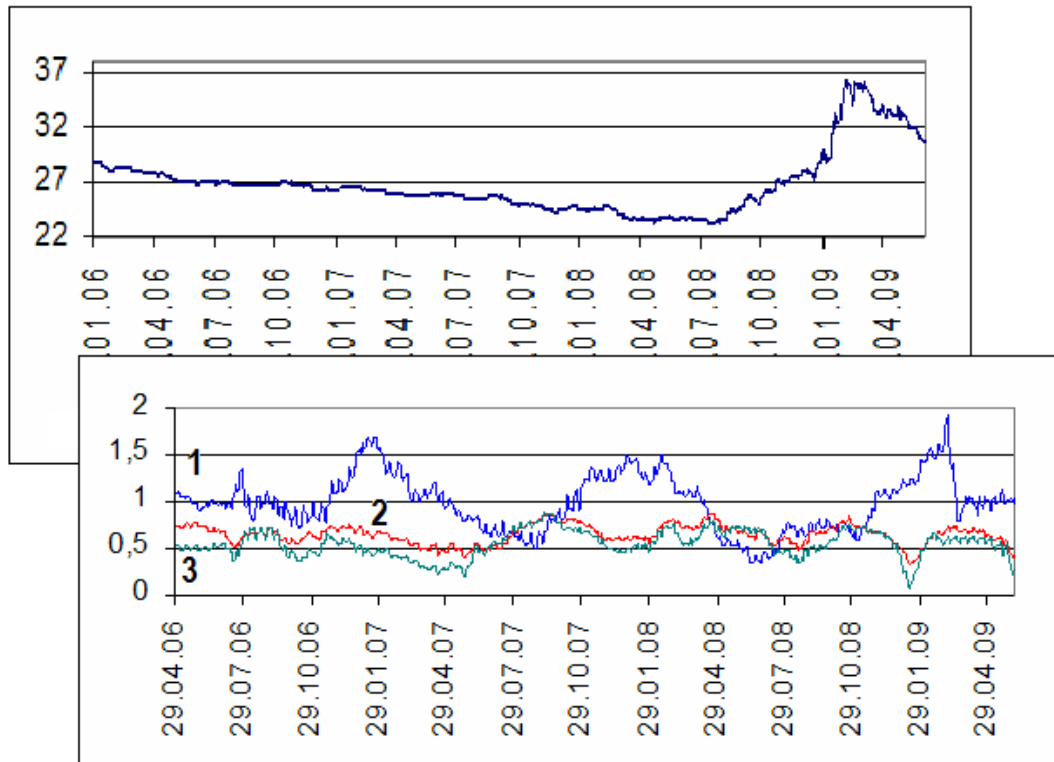


Рисунок 5.13 – Динамика $h(q)$ для рядов котировок доллар США/рубль:

$h(-5)$ – линия 1, $h(5)$ – линия 3, H – линия 2

На рисунке 5.14 представлены временные ряды котировок евро/доллар, индекса S&P, индекса NASDAQ и соответствующей динамики показателя $h(q)$ с 2006 г. по 2009 г. Как видно, для приведенных временных рядов наблюдаются те же тенденции, что и для показателя Херста ряда доллар/рубль, однако, для рядов финансовых индексов изменение мультифрактальной структуры в другие сроки. В остальном поведение графиков обобщенного показателя Херста совпадает.

Результаты проведенных исследований подтверждают возможность использования мультифрактального анализа для выявления скрытых нарушений функционирования финансовых рынков и использования изменения мультифрактальных характеристик как предвестника кризисных явлений.

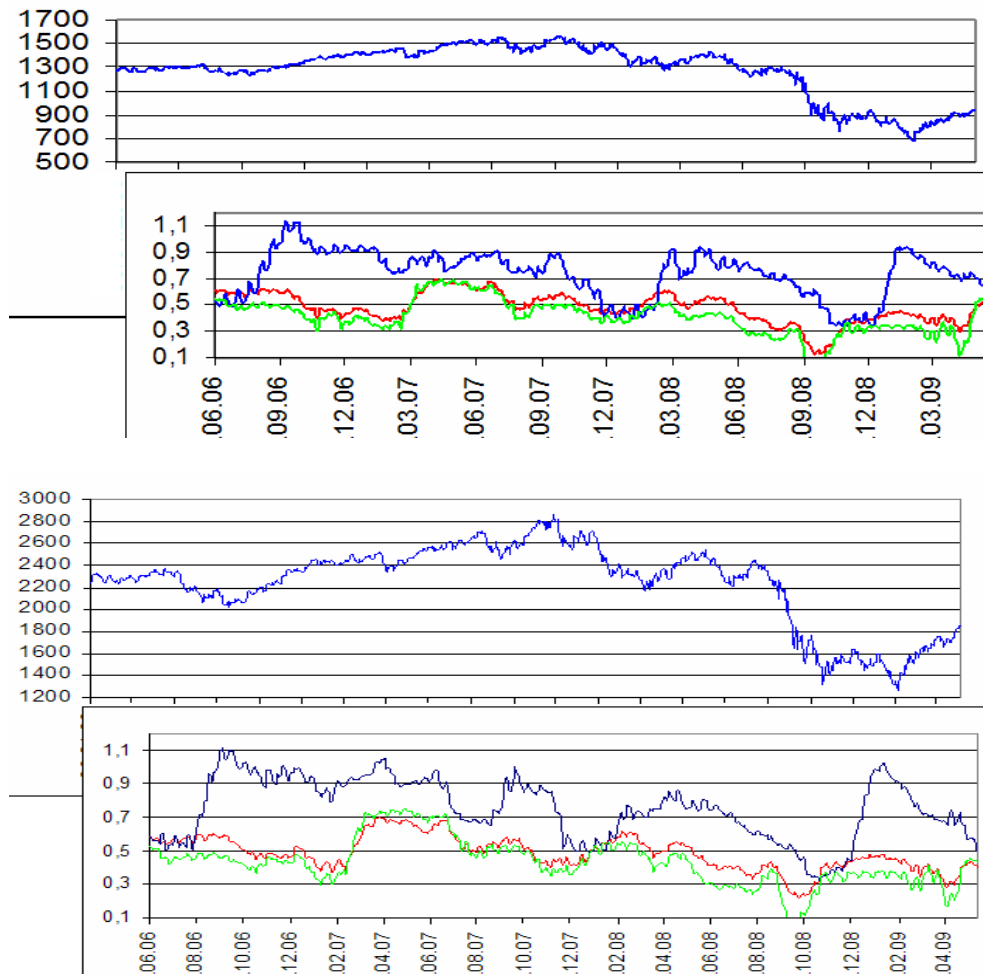


Рисунок 5.14 – Динамика $h(q)$ для рядов евро/доллар(вверху); индекса S&P (посередине); индекса NASDAQ (внизу)

5.2.2 Исследование фрактальных биомедицинских сигналов

Фрактальная геометрия применяется в биологии более четверти века. Использование фрактальных методов открывает новые возможности в изучении функциональной организации живых систем. Устойчивая работа такой сложной, иерархически организованной системы обеспечивается взаимной подчиненностью структур, относящихся к разным пространственным масштабам. Многочисленные экспериментальные и клинические данные дают основание для вывода о том, что исследование фрактальной топологии различных биологических систем позволит

заложить основы фрактальной диагностики [Bassingthwaighte, 1994; Ivanov, 2001; Ching, 2007; Harikrishnan, 2013; Philippe, 2001].

В данном подразделе исследованы фрактальные свойства и выявлены характерные особенности таких важных биомедицинских сигналов, как электрическая энцефалограмма и кардиограмма.

Оценивание мультифрактальных свойств электрокардиограмм

Как известно, для диагностики и выявления различных заболеваний сердца важное место имеет анализ электрокардиограммы (ЭКГ). ЭКГ представляет собой запись электрической деятельности сердца. Малейшее отклонение от нормы может свидетельствовать о нарушении работы сердечного ритма, а также являться свидетельством наличия различных заболеваний. Одним из методов диагностики сердечных заболеваний, является анализ рядов, построенных по RR- интервалам.

RR-интервал представляет собой промежуток времени между соседними зубцами электрокардиограммы и равен продолжительности сердечного цикла. Данные интервалы играют очень важную роль для определения частоты сердечных сокращений и диагностики различных видов аритмий сердца. На рисунке 5.15 показано построение ряда по значениям RR-интервалов. Известно, что такие ряды имеют фрактальную структуру, поэтому их можно исследовать с помощью мультифрактальных методов.

Исходные данные для исследований в работах [Kirichenko, 2012; Alghawli, 2015] были получены на специализированном сайте [PhysioNet]. В ходе медицинского исследования рассматривались пациенты, принадлежащие к возрастной группе от 45 до 69 лет и имеющих сердечную аритмию. Приведены данные RR-интервалов до и после приема медицинского препарата «Flecainide», применяющегося для лечения и предотвращения тахикардии – увеличения частоты сердечных сокращений.

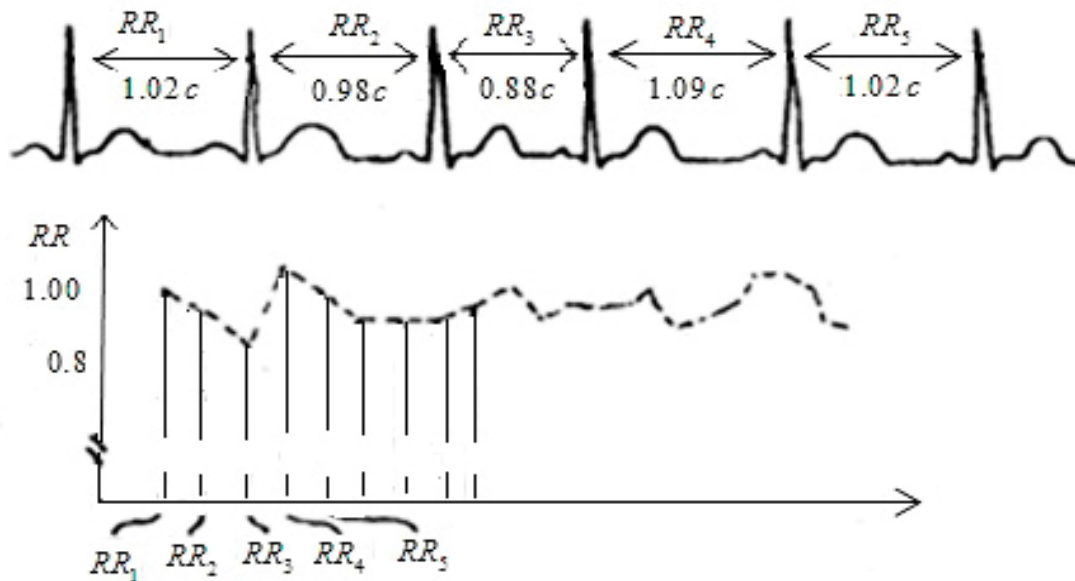


Рисунок 5.15 – Изображение нормального ЭКГ-сигнала, с указанием RR-интервалов и построение последовательности RR-интервалов

На рисунке 5.16 приведены результаты мультифрактального анализа: скейлинговая экспонента $\tau(q)$ и мультифрактальный спектр $f(\alpha)$, типичные для последовательностей RR-интервалов здорового человека. То есть, типичный диапазон значений $f(\alpha)$ человека без кардиозаболеваний лежит в пределах $0.9 < \alpha < 1.7$.

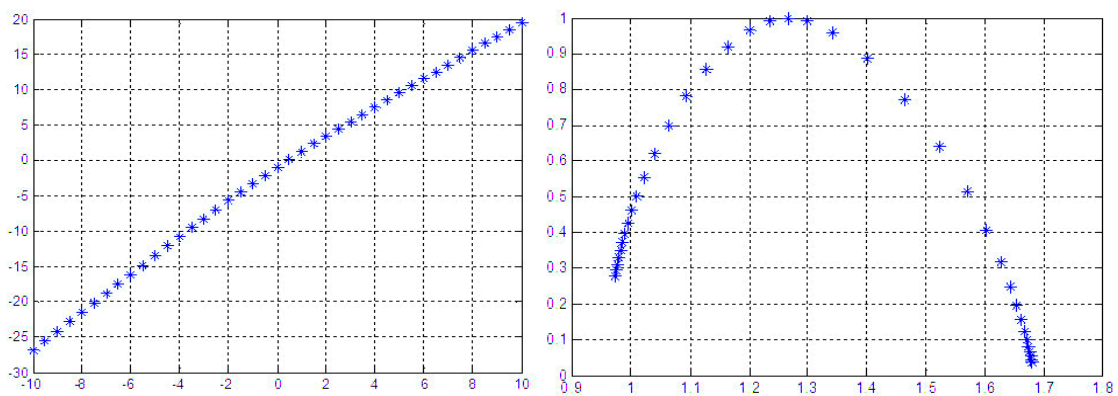


Рисунок 5.16 – Скейлинговая экспонента $\tau(q)$ и мультифрактальный спектр $f(\alpha)$, типичные для здорового человека

Мультифрактальный анализ последовательностей RR-интервалов пациентов, страдающих тахикардией, показал, что в этом случае типичный диапазон значений $f(\alpha)$ лежит в пределах $0.2 < \alpha < 1.5$, т.е. является более широким и смещенным влево (рисунок 5.16). Исследования показали, что применение препарата вызывает изменение мультифрактальных характеристик последовательности RR-интервалов.

Практически для всех испытуемых в рядах RR-интервалов после применения препарата функция мультифрактального спектра была сдвинута вправо, то есть полученные значения величины α увеличились. На рис. 5.17 приведены значения скейлинговой экспоненты и функции мультифрактального спектра рядов RR-интервалов для пациентов, до и после применения медицинского препарата.

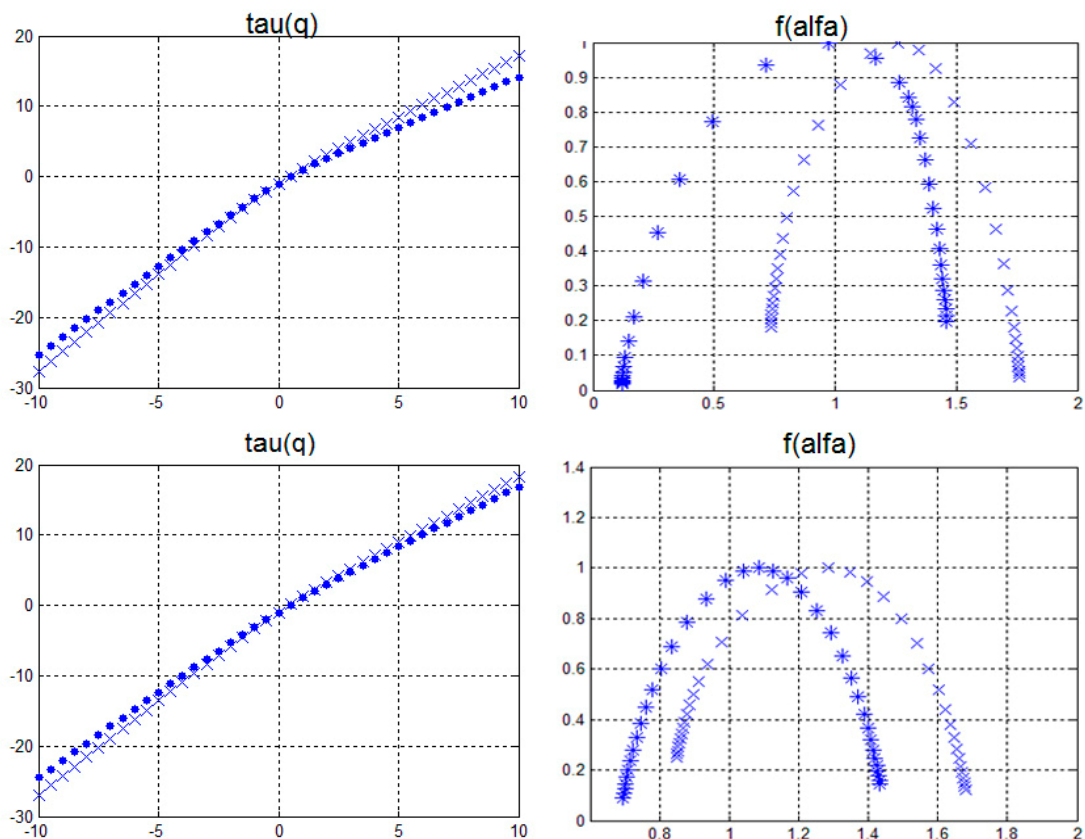


Рисунок 5.17 – Скейлинговая экспонента $\tau(q)$ и мультифрактальный спектр $f(\alpha)$, до применения препарата (*) и после его применения (x)

Эти результаты позволяют предположить, что мультифрактальные методы могут быть успешно использованы в анализе электрокардиологических сигналов для определения функциональных изменений в деятельности сердца. Мультифрактальный анализ ЭКГ может быть основой для статистических исследований, которые позволят сформулировать методы анализа ЭКГ для клинической практики.

Исследование мультифрактальных характеристик записей ЭЭГ

В работе [Alghawli, 2015] было проведено исследование, как изменяются мультифрактальные характеристики ЭЭГ человека, когда он совершает какое-либо физическое действие, и когда он просто воображает, что он это делает. В качестве экспериментальных данных были использованы сигналы ЭЭГ испытуемых, выполняющих определенные действия [PhysioNet]. Каждый испытуемый выполнял следующий комплекс действий:

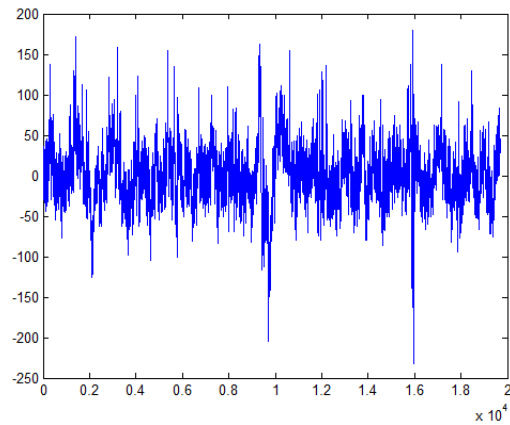
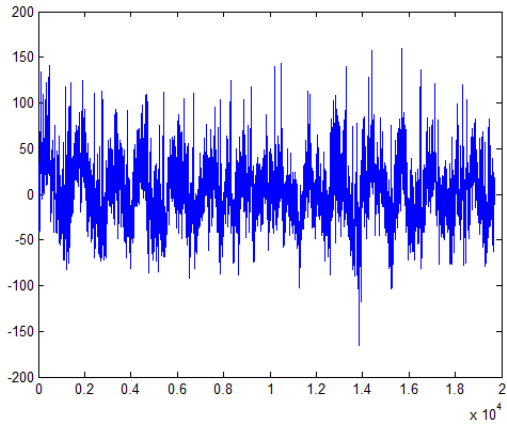
- в правом (левом) углу экрана компьютера появлялся круг, и испытуемый сжимал соответственно правую (левую) руку в кулак;

- в правом (левом) углу экрана компьютера появился круг, и испытуемый только представлял себе, что он сжал руку в кулак, хотя на самом деле рука оставалась неподвижной.

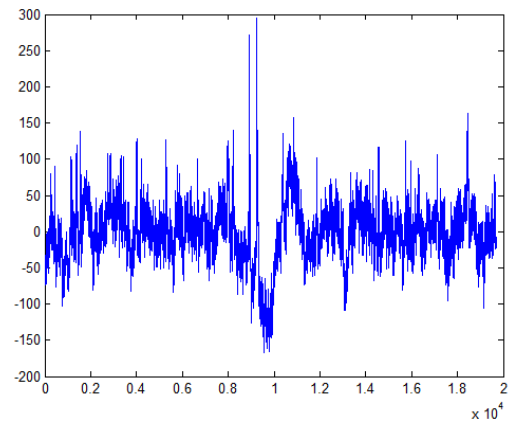
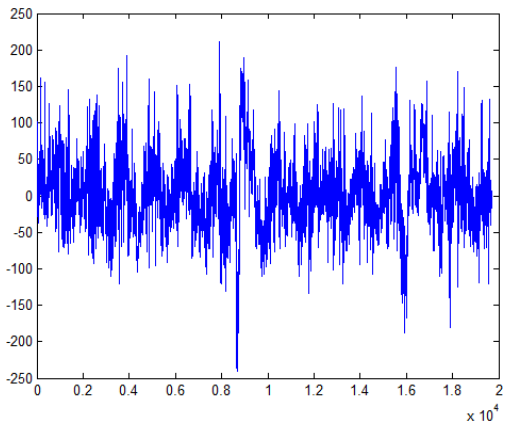
На рисунке 5.18 приведены графики исследуемых временных рядов ЭЭГ для двух испытуемых, выполнивших описанные выше задачи. Слева представлены записи ЭЭГ, когда испытуемый сжимает руку в кулак. Справа показаны записи ЭЭГ, когда испытуемый просто воображает, что он это делает.

Были изучены мультифрактальные характеристики соответствующих временных рядов. Наиболее наглядно демонстрирует различия между двумя состояниями функция мультифрактального спектра $f(\alpha)$. На рисунке 5.19 представлены функции мультифрактального спектра, соответствующие записям ЭЭГ, показанным на рисунке 5.18. Линия 1

соответствует состоянию, когда испытуемый сжимает кулак, а линия 2 соответствует случаю, когда он просто представляет, что сжимает.

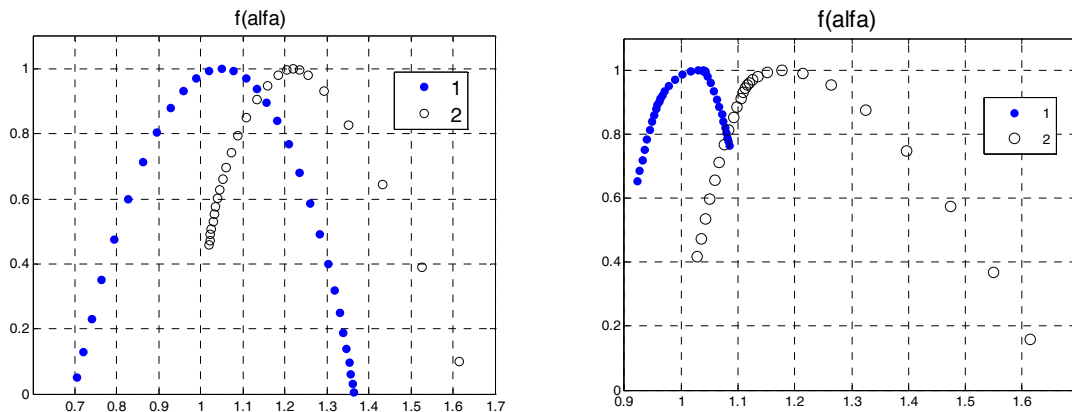


1-й испытуемый



2-й испытуемый

Рисунок 5.18 – Записи ЭЭГ: испытуемый сжимает руку в кулак (слева) и испытуемый только воображает, что он сжимает руку (справа)



1-й испытуемый

2-й испытуемый

Рисунок 5.19 – Функции мультифрактального спектра ЭЭГ. Линия 1: испытуемый сжимает кулак; линия 2: испытуемый представляет, что он сжимает кулак

Таким образом, эксперимент показывает, что функция мультифрактального спектра $f(\alpha)$ для воображаемых действий значительно сдвигается вправо, что позволяет различать два состояния испытуемого. В ходе исследования были изучены записи ЭЭГ, полученные с использованием разных электродов. Было обнаружено, что записи ЭЭГ ряда электродов более чувствительны к изменениям физической активности человека и мультифрактальные характеристики, полученные по этим записям для реальных и воображаемых действий, значительно отличаются. При исследовании записей ЭЭГ других электродов явная связь между мультифрактальными характеристиками не была выявлена.

Исследование мультифрактальных характеристик записей ЭЭГ для разных фаз бодрствования и сна.

В работе [Alghawli, 2015] были исследованы записи ЭЭГ лабораторных животных, которые были разделены на фазы бодрствования (AWAKE),

медленный сон (SWS) и быстрый сон (REM). На рисунке 5.20 показаны типичные реализации ЭЭГ для разных фаз бодрствования и сна.

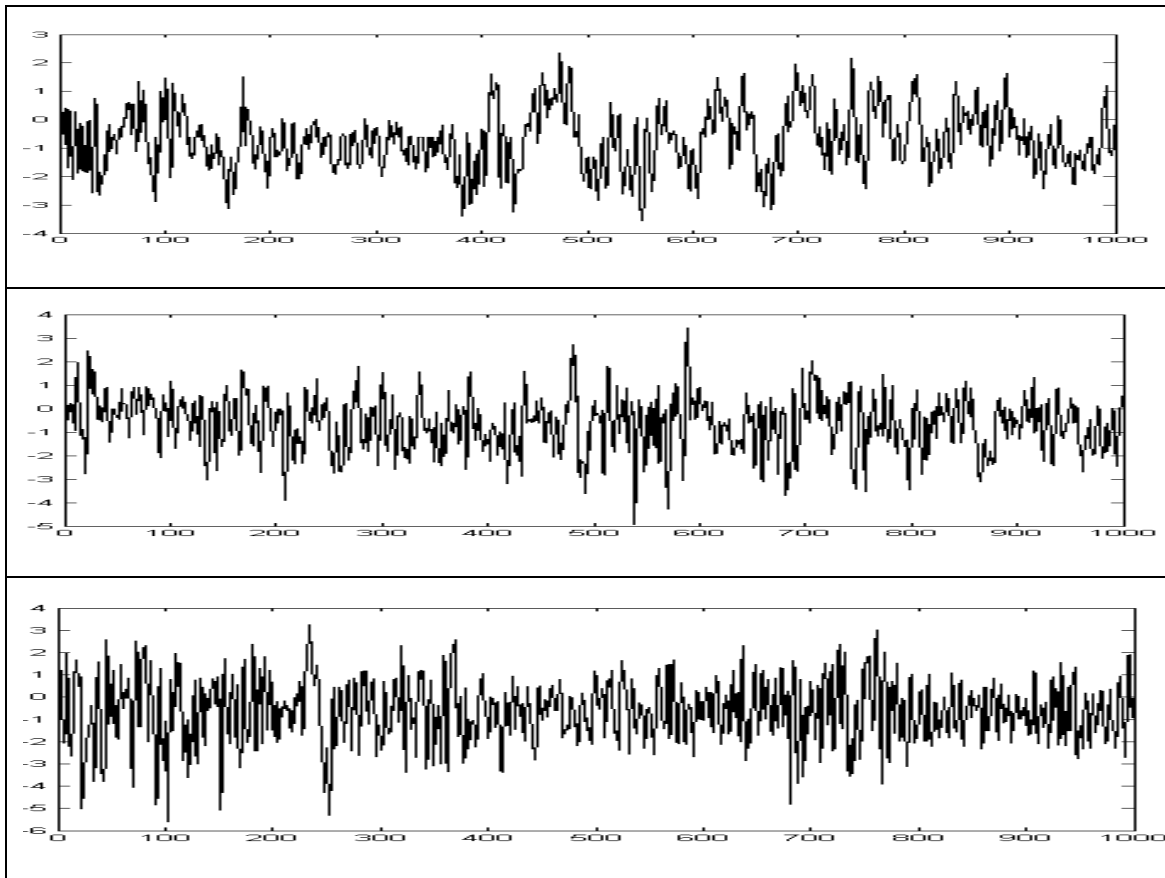


Рисунок 5.20 – Реализации ЭЭГ: AWAKE (вверху), SWS (посередине) и REM (внизу)

Проведенный мультифрактальный анализ показал значительные различия в характеристиках записей ЭЭГ в фазах бодрствования и сна. На рисунке 5.21 показан обобщенный показатель Херста $h(q)$, скейлинговая экспонента $\tau(q)$ и мультифрактальный спектр $f(\alpha)$, которые соответствуют реализациям ЭЭГ, показанным на рисунке 5.20.

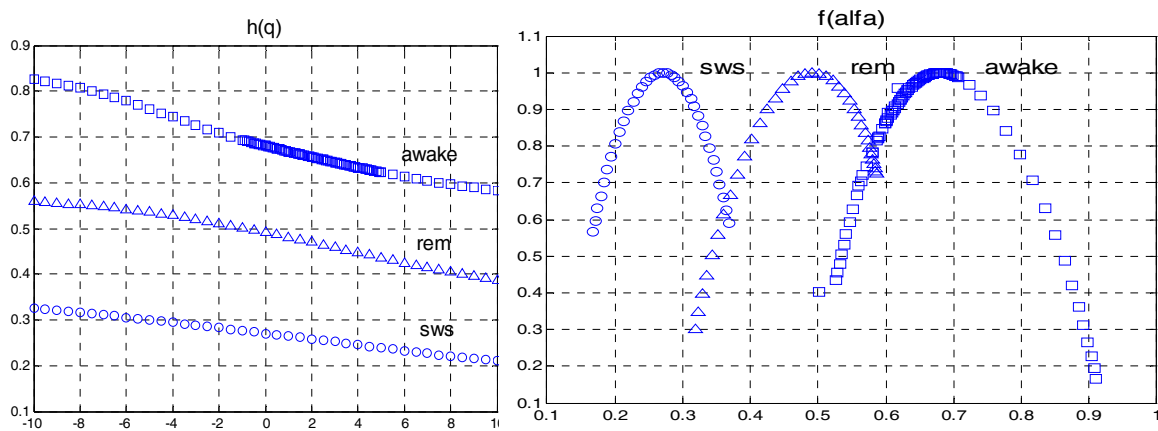


Рисунок 5.21 – Обобщенный показатель Херста, скейлинговая экспонента и мультифрактальный спектр AWAKE (квадраты), SWS (кружки) and REM (треугольники)

Анализ также показал, что существует несомненная долгосрочная зависимость для реализаций ЭЭГ в фазе бодрствования: в этом случае показатель Херста заметно превышает 0.5. Фаза медленного сна характеризуется антиперсистентностью, в этом случае показатель Херста принимает значения в диапазоне менее 0.5. Для REM-сна оценки показателя Херста близки к значению 0.5, они принимают значения и больше, и меньше 0.5. В этом случае реализации ЭЭГ характеризуется очень слабой автокорреляционной зависимостью.

5.2.3 Анализ самоподобных и мультифрактальных свойств сигналов, связанных с природными явлениями

Хорошо известно, что многие временные ряды, отвечающие природным явлениям, имеют самоподобную структуру. К таким явлениям относятся разливы рек, количество выпавших осадков, изменение температуры, увеличение диаметра колец деревьев [Мандельброт, 2002; Федер, 1991; Шредер, 2005]. В данном подразделе были проведены исследования

свойств некоторых сигналов такого рода, и установлена их фрактальная структура.

Фрактальные свойства сигналов, отраженных атмосферным слоем

Современные проблемы исследований и прогнозирования термодинамических процессов в атмосферном пограничном слое требуют разработки и применения новых математических моделей и методов анализа данных. Одним из методов исследования процессов, протекающих в атмосферном пограничном слое, является акустическое зондирование и последующий анализ как эхо-сигналов, так и ансамблей последовательно полученных профилей эхо-сигналов – эхограмм. В результате экспериментальных исследований, проведенных на действующей станции акустического зондирования Харьковского национального университета радиоэлектроники в период с 2007 по 2009 г., получен обширный экспериментальный материал в виде эхограмм акустического зондирования, записанных в цифровом виде [Леонидов, 2010].

В работе [Кириченко, 2011 (1)] был проведен анализ некоторых из этих экспериментальных данных. На рисунке 5.22 приведен пример эхограммы, полученной в жаркий летний день с помощью бистатической системы акустического зондирования, установленной на крыше пятиэтажного здания, расположенного в центре мегаполиса. Такой вид эхограммы можно считать типичным для данных условий наблюдения.

По оси абсцисс отложено время в секундах, по оси ординат - высота зондируемого слоя в метрах. Максимальная высота зондируемого слоя атмосферы $h_z \cong 372,3 \text{ м}$; значение разрешающей способности по высоте $\Delta h \cong 5 \text{ м}$ при температуре воздуха $t_g \cong 27^\circ\text{C}$; несущая частота

зондирующего сигнала $f_o = 1800 \text{ Гц}$, период повторения зондирующих импульсов $T_u = 2 \text{ с}$. Горизонтальные полосы, которые просматриваются на эхограмме, обусловлены отражением от близко расположенных зданий.

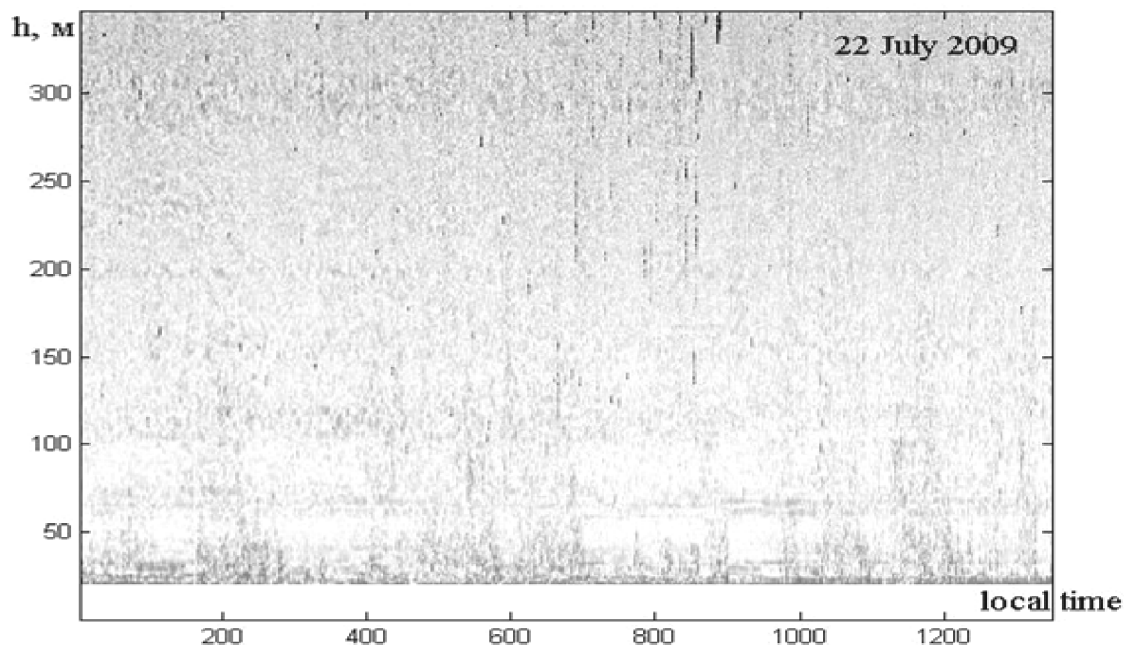


Рисунок 5.22 – Эхограмма акустического зондирования

На рисунке 5.23 представлен сигнал, отраженный при высоте зондируемого слоя 50 м, его корреляционная функция и спектр, которые демонстрируют свойство долгосрочной зависимости.

На рисунке 5.24 приведены графики значений сигналов $X(t)$, отраженных при разной высоте зондируемого слоя – 50 м и 200 м. Оценки параметра Херста, полученные для этих сигналов, соответственно равны $H_{50} = 0.73$ и $H_{200} = 0.55$.

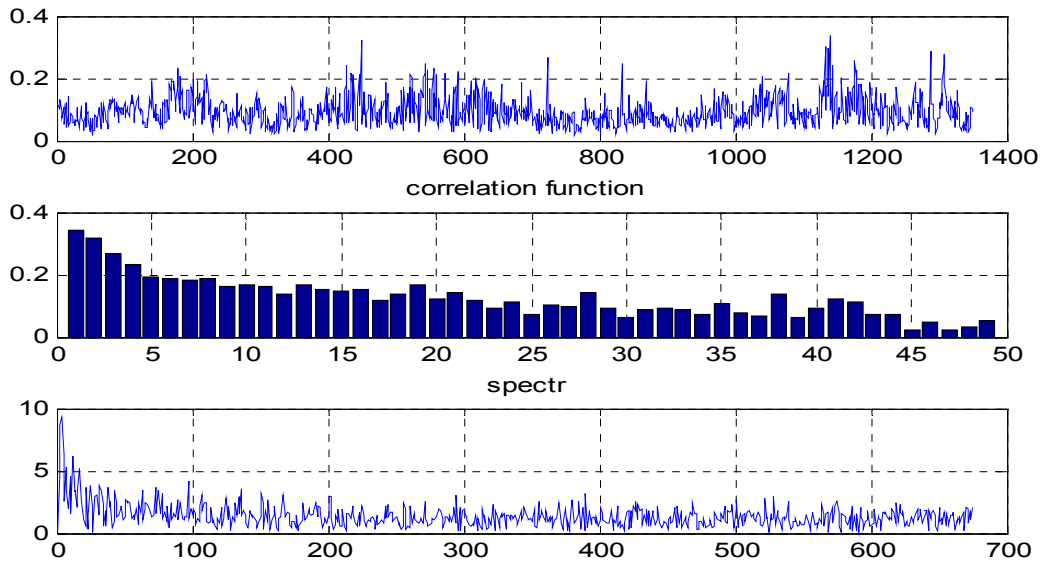


Рисунок 5.23 – Сигнал, его корреляционная функция и спектр

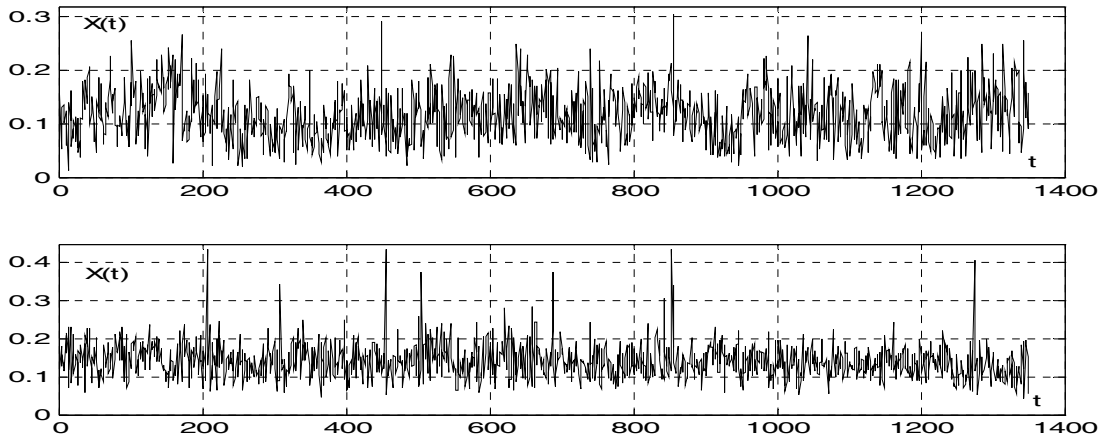


Рисунок 5.24 – Отраженные сигналы при высоте зондируемого слоя 50 м (вверху) и 200 м (внизу)

Методом дискретного вейвлет-преобразования были получены оценки показателя Херста для сигналов, отраженных при разной высоте зондируемого слоя. На рисунке 5.25 показаны значения параметра Херста H , как функции высоты отражающего слоя h , рассчитанные для численных данных эхограммы, представленной на рисунке 5.22.

Как видно из рисунка, на малых высотах, где оказывает влияние близость зданий, сооружений, высоких деревьев и других объектов мегаполиса, значения показателя Херста не превышают 0.6. Затем, в связи с притоком тепла в нижних слоях атмосферы, значения показателя Херста возрастают до 0.75, что говорит о наличии долгосрочной зависимости в атмосферных процессах на небольших высотах. По мере увеличения высоты и удаленности от мегаполиса показатель Херста уменьшается и стремится к 0.5, что соответствует слабо коррелированным случайным процессам.

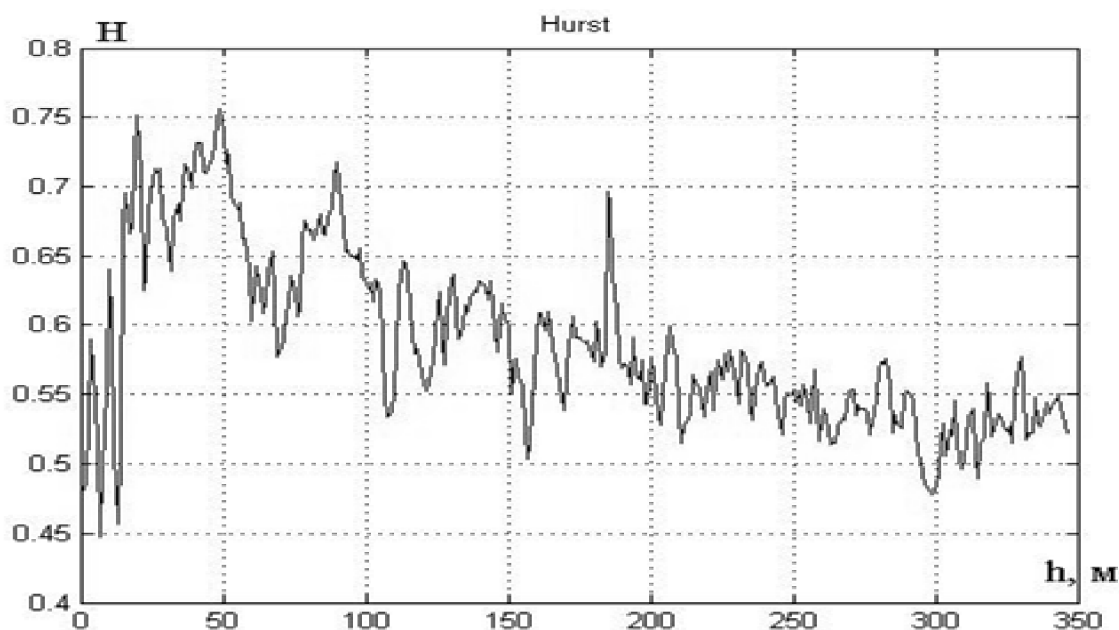


Рисунок 5.25 – Параметр Херста H как функция высоты отражающего слоя h

Мультифрактальный анализ, проведенный с помощью ММВП, подтверждает, что с увеличением высоты отражающего слоя атмосферы, изменяется корреляционная структура процессов, что отражается в

уменьшении значений обобщенного показателя Херста $h(q)$. На рисунке 5.26 приведены значения обобщенного показателя Херста для сигналов, отраженных при высотах 50, 150 и 200 м.

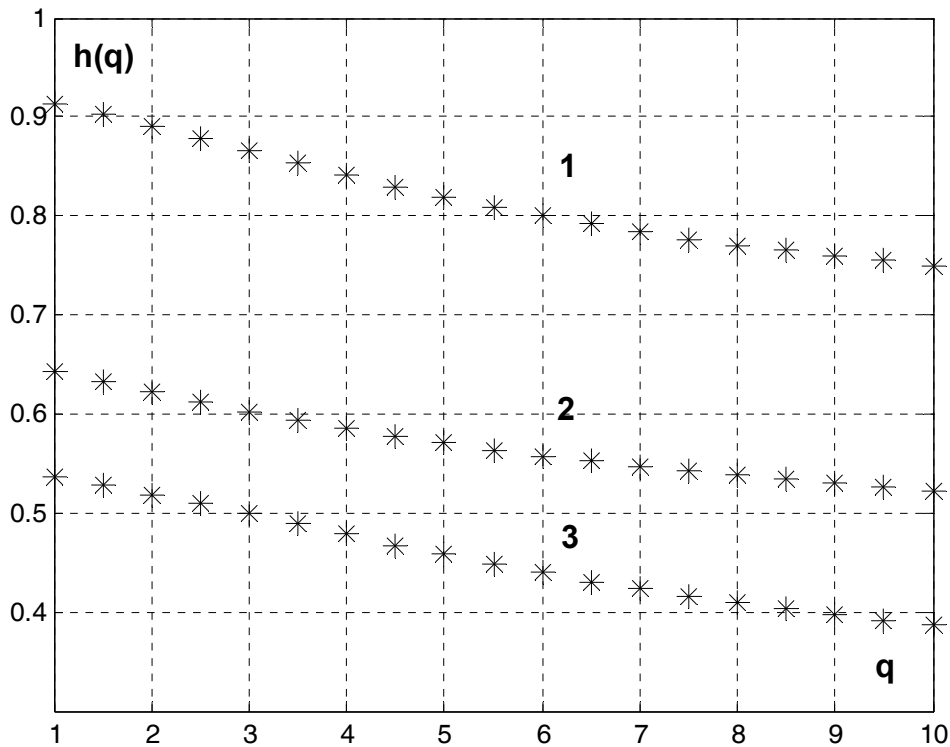


Рисунок 5.26 – Обобщенный показатель Херста для сигналов, отраженных при высотах 50 м (линия 1), 150 м (линия 2) и 200 м (линия 3)

Значения параметра q в данном случае изменялись в диапазоне $1 \leq q \leq 10$. Следует отметить, что диапазон функции $h(q)$ не изменяется с увеличением высоты h . Кроме того, данные сигналы не проявляют сильной неоднородности (если сравнить с диапазоном $h(q)$ для биномиального каскада). Таким образом, можно считать, что математическими моделями сигналов, отраженных от атмосферы, могут выступать монофрактальные случайные процессы.

Фрактальные свойства временных рядов показаний приборов, связанных с солнечной активностью

В последние годы появился ряд работ, посвященных фрактальному анализу данных, связанных с солнечной активностью [Abramenko, 2008]. Одним из приборов, реагирующим на солнечную активность, являются сверхлегкие крутильные весы (КВ). С их помощью Ш. Кулон установил закон взаимодействия электрических зарядов, а Г. Кавендиш измерил величину мировой гравитационной постоянной. Крутильные весы относятся к числу исключительно чувствительных приборов и до настоящего времени применяются в ответственных экспериментах при изучении так называемых «сверхслабых взаимодействий» в биологии и связанных с ней дисциплинах, а также в физике для уточнения значения гравитационной постоянной.

В работах украинского радиоастронома А.Ф.Пугача [Пугач, 2009] впервые были проведены длительные однородные наблюдения за поведением сверхлегких КВ, снабженных автоматической системой регистрации данных. Показания КВ регистрировались каждую минуту. Анализ наблюдаемых данных указывает на то, что суточная переменность показаний КВ не связана с изменениями температуры, давления, условиями освещенности, гравитационным воздействием Солнца. Однако КВ однозначно реагируют на солнечные и лунные затмения, на восход и заход Солнца, на покрытие планет Луной и т.д. На рис. 5.27 представлены показания КВ за период с 13 по 23 ноября 2010 г.

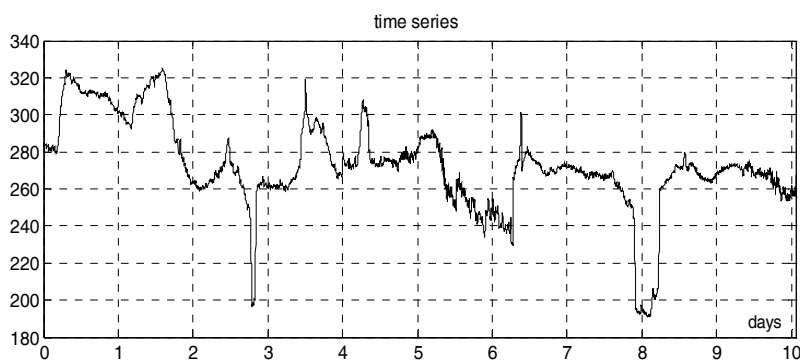


Рисунок 5.27 – Временной ряд показаний КВ

Исследование фрактальной структуры данных КВ представляет несомненный научный интерес. Особую важность представляет анализ наблюдений, полученных в течении одно-двух суток, что позволит отслеживать изменения фрактальной структуры в зависимости от изменения солнечной активности. В работе [Кириченко, 2011 (2)] проведен анализ временных рядов, полученных в разные периоды года, который показал наличие явно выраженных мультифрактальных свойств. На рисунке 5.28 показаны мультифрактальные спектры, полученные методом МФДФА (слева) и ММВП (справа), построенные по рядам двухсуточных наблюдений (2880 значений), типичные для февраля, мая и октября.

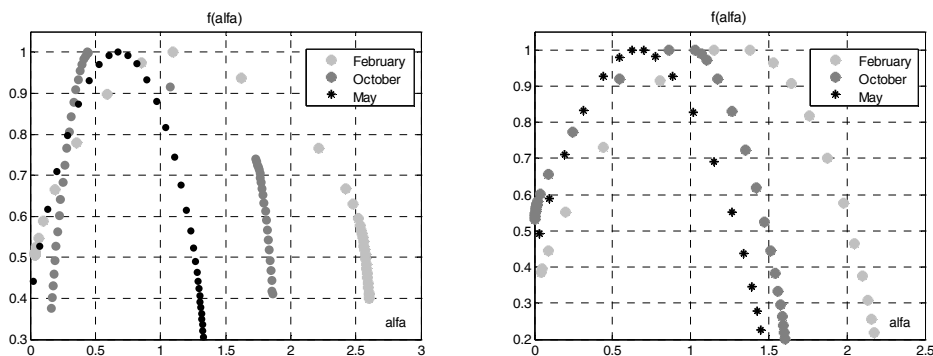


Рисунок 5.28 – Выборочные функции $f(\alpha)$ для показаний КВ, полученные методом МФДФА (слева) и ММВП (справа)

Результаты исследований показали, что мультифрактальная структура рядов показаний КВ изменяется в зависимости от времени года. Зависимость этой структуры от солнечной активности требует дальнейших исследований.

Фрактальные свойства температурных рядов

В работе [Кириченко, 2011 (3)] рассмотрены ряды ежедневной температуры (максимальное, минимальное и среднее значения) по городу Киеву за 50 лет с 1942 по 1992 годы. Данные взяты на специализированном сайте [Архив погоды]. На рисунке 5.29 показан

фрагмент температурного ряда за 1952-1956 гг. (вверху) и соответствующий ряд ежедневных приращений (внизу).

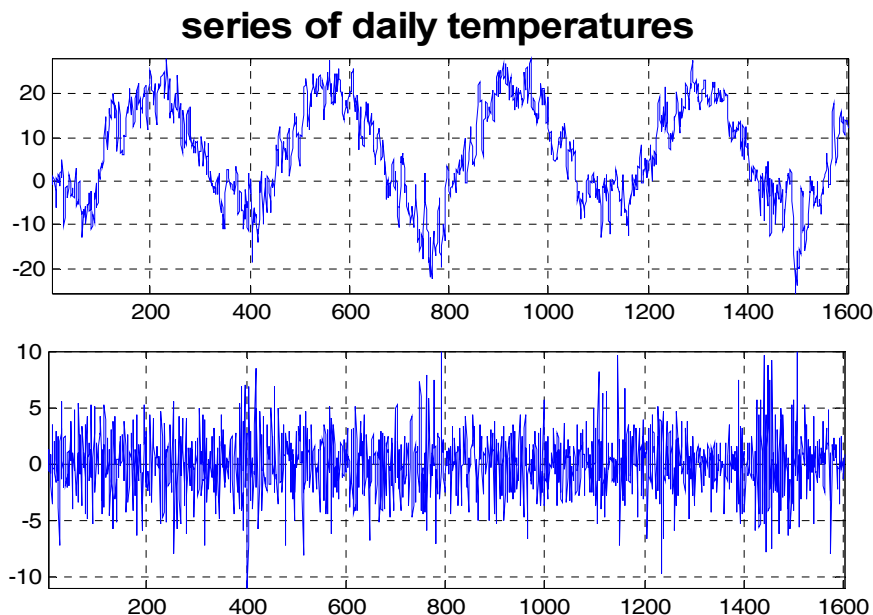


Рисунок 5.29 – Ряд ежедневных температур и ряд ежедневных приращений

Перед проведением мультифрактального анализа, необходимо исследовать флуктуационную функцию $F(\tau)$. Самоподобному поведению отвечает наличие участка с линейной зависимостью. Если функция $F(\tau)$ имеет несколько линейных участков, это предполагает наличие нескольких скейлингов для различных временных интервалов. На рисунке 5.30 слева приведен график $F_2(s)$, построенной на временном интервале от 2^5 (месяц) до $2^{9.5}$ (два года) дней.

Визуально очевидно, что график имеет два близких к линейным участка с разными углами наклона. Стоит отметить сильный выброс на втором участке, который соответствует значению аргумента $2^{8.5}$ и практически равен одному году, что отвечает годовой сезонной составляющей

процесса. Мультифрактальный анализ был проведен отдельно для каждого участка. Для первого участка параметр Херста $H = 0.21$, для второго $H = 0.92$. На рисунке 5.30 справа показаны функции мультифрактального спектра для обоих участков.

Таким образом, можно сделать вывод, что на интервалах от двух месяцев до полугода (участок 1) ряд температурной зависимости является антиперсистентным, а при временных значениях от полугода до полутора лет (участок 2), ряд обладает сильной долгосрочной зависимостью. В обоих случаях ряды обладают слабовыраженными мультифрактальными свойствами.

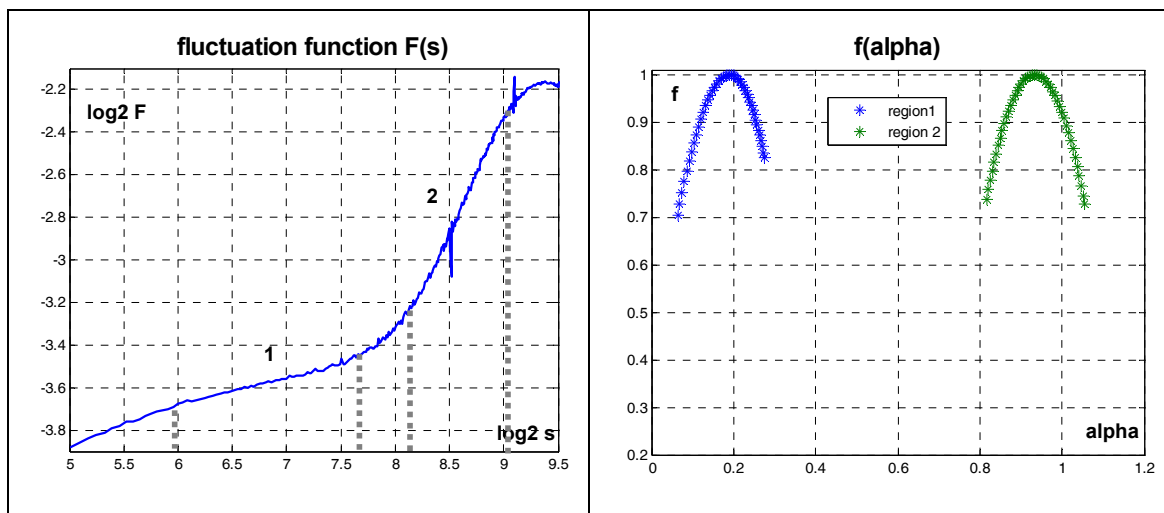


Рисунок 5.30– Флуктуационная функция $F_2(s)$ для температурного ряда и функции $f(\alpha)$ для участков антиперсистентной и персистентной зависимости

Мультифрактальный анализ сейсмических волн

Одним из известных примеров временных рядов, обладающих явно выраженными фрактальными свойствами, являются сейсмические волны. Сейсмические волны представляют собой волны энергии, которые передвигаются по земле или другим упругим телам в результате процесса,

производящего низкочастотную акустическую энергию (землетрясение, взрыв и т. д.).

На сегодняшний день сейсмический мониторинг является актуальной проблемой. Одной из практических целей сейсмического мониторинга является создание систем сигнализации и предупреждения о сейсмической опасности от тектонических землетрясений в населенных регионах или вокруг крупных инженерно-технических и экологически опасных объектов, таких как атомные гидроэлектростанции и речные дамбы. Автоматический сейсмический мониторинг реального времени является не только важнейшей, но одновременно и сложнейшей задачей сейсмологической практики. Существуют различные методы детектирования сейсмических сигналов, базирующиеся на анализе отношения амплитуд, спектральных характеристиках, вейвлет-анализе и т.д. [Sabbione, 2010] Ряд методов основан на оценивании фрактальных характеристик сейсмических процессов, таких как показатель Херста и фрактальная размерность [Boschetti, 1996; Cao, 2005].

В работах [Кириченко, 2014; Кириченко, 2015] показано, что сейсмические сигналы обладают мультифрактальными свойствами, и предложен метод детектирования сейсмического события по изменению мультифрактальных характеристик сейсмического ряда.

Проведенные численные исследования показали, что сейсмические волны обладают мультифрактальными свойствами и разные стадии их развития имеют различные функции обобщенного показателя Херста. На рисунке 5.31 вверху представлен сейсмический временной ряд, где выделены два окна: до всплеска активности и после, в этих окнах обобщенный показатель Херста $h(q)$, показанный на рис. 5.31 внизу имеет большие различия.

Для определения момента вступления волны был применен метод «скользящего окна». В исследуемом временном ряде выделяется последовательность значений (окно), и для этих данных оценивается функция обобщенного показателя Херста. Далее окно передвигается

вдоль ряда на заданную величину сдвига. Анализируя динамику возникновения участков сейсмического временного ряда с разной мультифрактальной структурой, можно диагностировать и прогнозировать возникновение сейсмических событий. Значения $h(q)$ для разных «окон» представлены на рисунке 5.32. Значения параметра q в данном случае изменялись в диапазоне $1 \leq q \leq 10$.

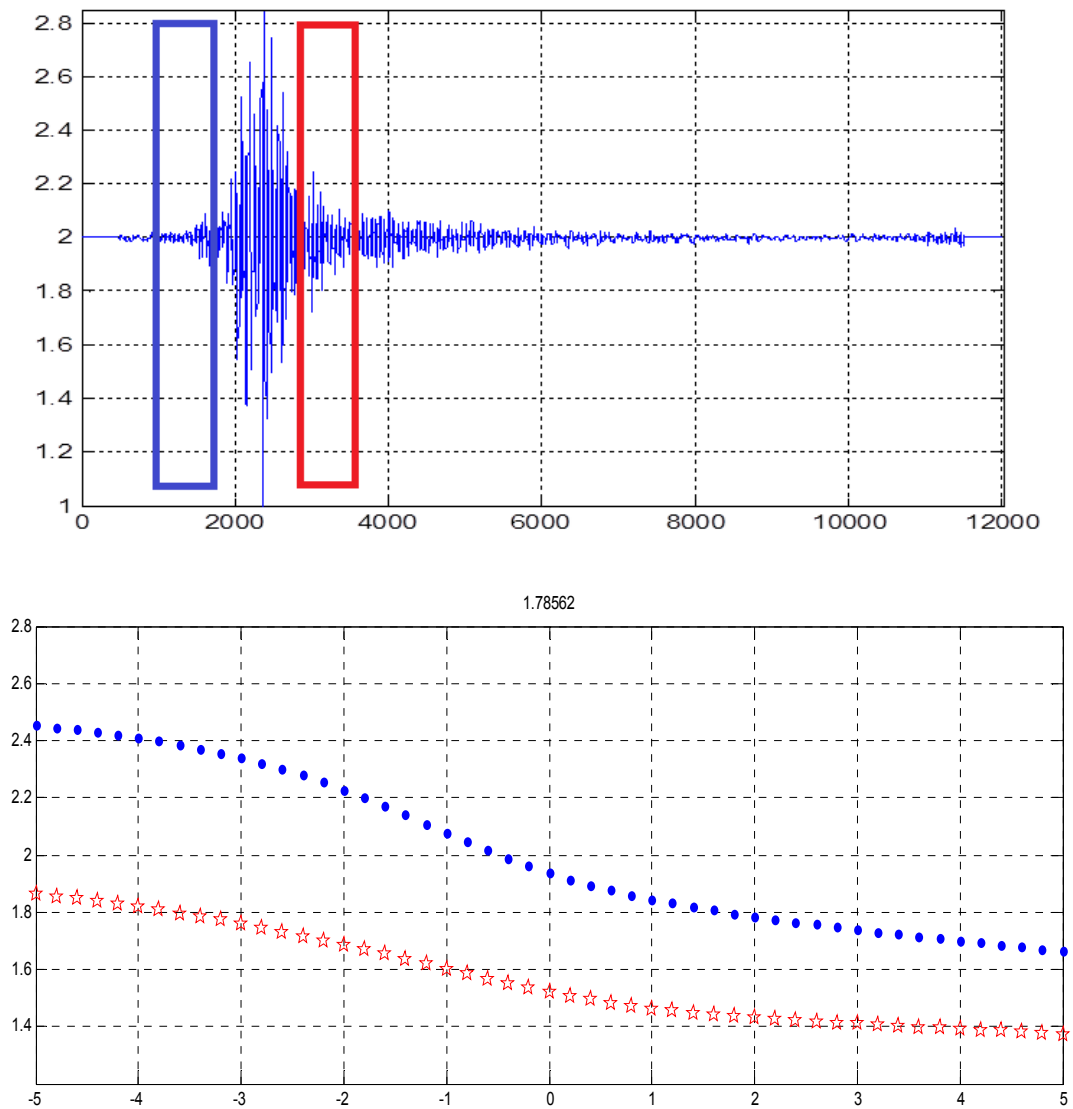


Рисунок 5.31 – Сейсмический ряд и обобщенный показатель Херста до всплеска(нижняя линия) и после (верхняя линия)

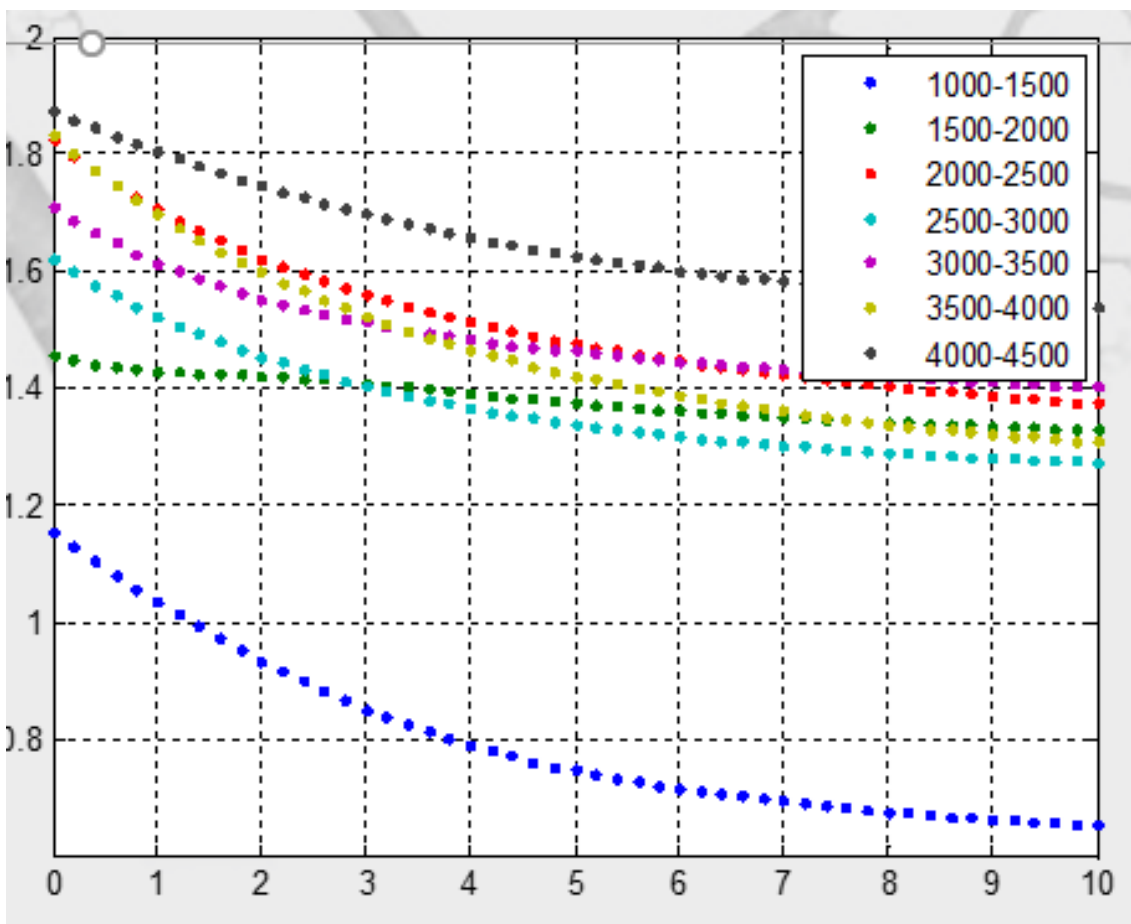
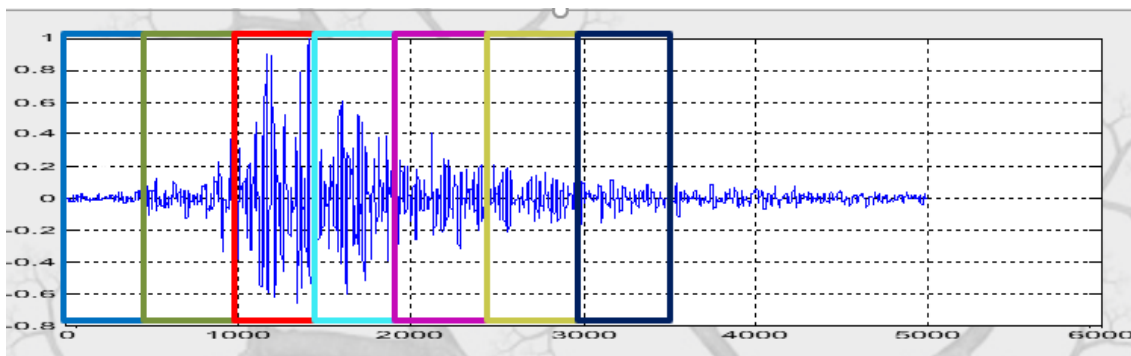


Рисунок 5.32 – Сейсмический ряд и обобщенный показатель Херста для разных выделенных «окон»

5.2.4 Анализ самоподобных и мультифрактальных свойств временных рядов активностей сообществ в социальных сетях

В настоящее время социальные сети стали важной частью жизни. Люди используют социальные сети, чтобы оставаться на связи с друзьями, знакомится с новыми людьми, узнавать новую информацию и так далее. Главная причина - общение и сохранение отношений. Также социальные сети активно используются в бизнесе для рекламы и продвижения продуктов и брендов, для создания нового бизнеса. Благодаря развитым социальным сетям активно создаются интерактивные платформы, где пользователи совместно используют, создают и обсуждают контент, создаваемый пользователями.

В последние годы появились исследования динамики сообществ в социальных группах, которые показывают, что соответствующие временные ряды обладают свойствами самоподобия [Yang, 2009; Rybski, 2012; Qingyun, 2016]. В работе [Кириченко, 2017] был проведен сравнительный фрактальный анализ для двух групп в социальной сети Facebook, найденным по ключевым словам, связанных с киберугрозами. Для проведения исследований в сети были выбраны две группы ThreatPost и Threat Signal, каждая численностью 13980 и 84375 пользователей соответственно. Для каждой из этих социальных групп были сняты данные за последние пять лет о количестве лайков, комментариев и уровне вовлеченности (показатель уровня вовлеченности аудитории в активности группы измеряется в процентном соотношении действий пользователей к охвату аудитории).

На рис.5.33 слева показаны временные ряды ежедневного количества лайков для обеих групп. Фрактальный анализ показал, что временные ряды показателей этих групп обладают сильными мультифрактальными свойствами. На рис. 5.33 справа представлены значения обобщенного показателя Херста для этих рядов. Оба ряда обладают фрактальными свойствами, персистентностью ($H_1, H_2 > 0.5$), однако ряд лайков для группы Threat Signal обладает значительно большей статистической

неоднородностью, что проявляется в значительно большем диапазоне величины $\Delta h(q)$.

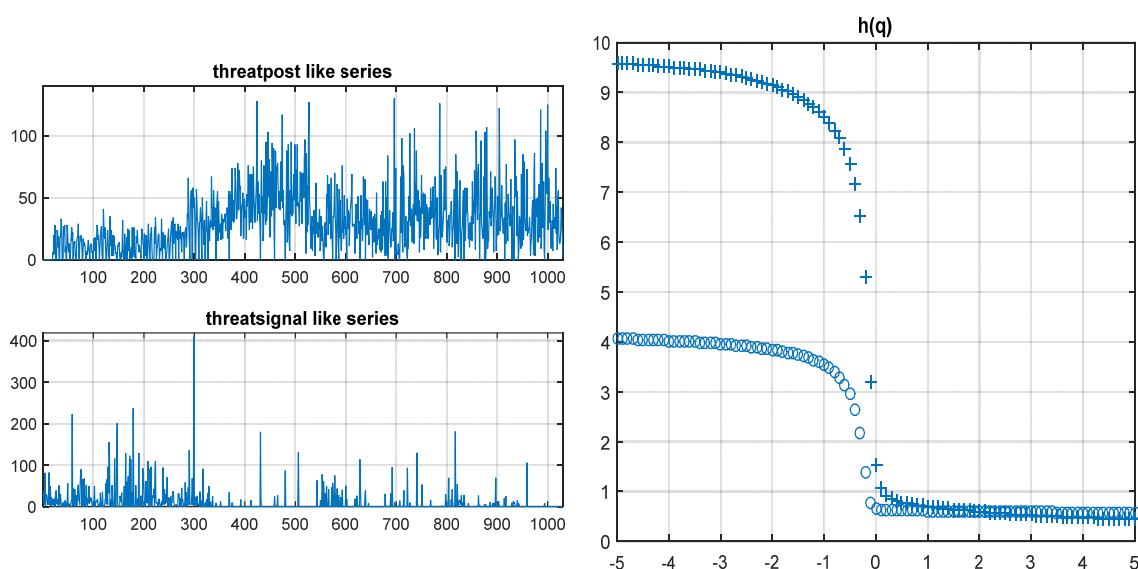


Рисунок 5.33 – Слева: временные ряды лайков для групп; справа: соответствующие значения $h(q)$ (+ – группа Threat Post, o – Threat Signal)

Исследования показали, что ряды лайков достаточно сильно коррелируют с рядами уровня вовлеченности, поэтому их соответствующие мультифрактальные характеристики очень близки. Ряды количества комментариев (рис. 5.34, слева), в отличие от рядов лайков, также имеют фрактальные свойства, но обладают достаточно близкой между собой мультифрактальной структурой (рис. 5.34, справа).

Можно предположить, что механизм генерации комментариев, который формирует фрактальную структуру временного ряда, достаточно сильно отличается от механизма проставления лайков. Таким образом, проведенные в работе исследования подтвердили, что многие временные

ряды показателей активности пользователей социальных сетей обладают фрактальными свойствами и применение фрактального анализа позволяет выявить различия и обнаружить характерные черты динамики разных социальных групп.

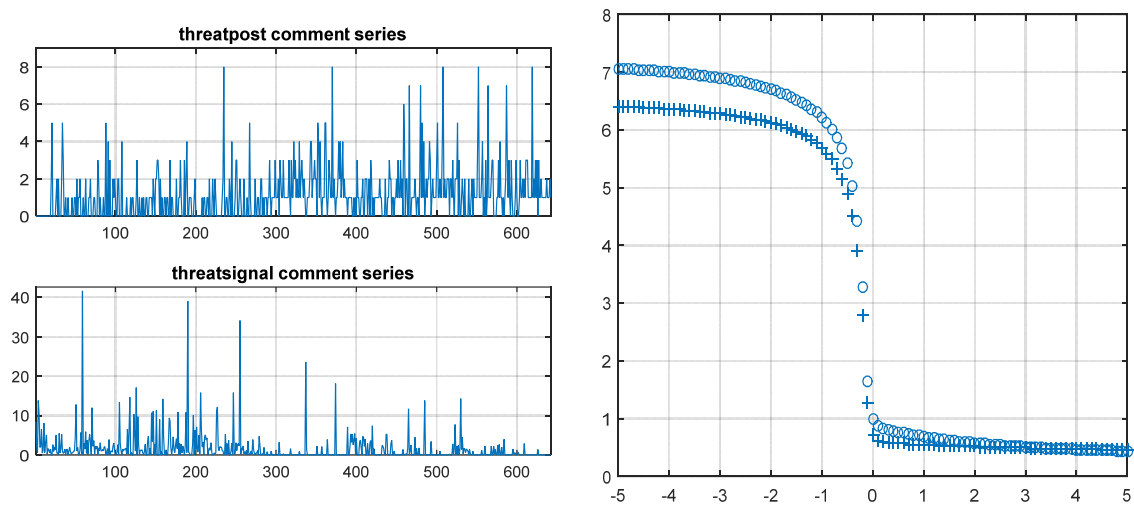


Рисунок 5.34 – Слева: временные ряды комментариев для групп; справа: соответствующие значения $h(q)$ (+ – группа Threat Post, o – Threat Signal)

Одним из направлений исследований данных в социальных сетях и финансовом секторе является проведение анализа отношений между информацией о биткоине, содержащейся в социальных сетях, и ценой биткоина. Биткойн (Bitcoin) - децентрализованная платежная система электронных валют, инновация в области информационных технологий, которая использует сложные криптографические методы для подписи транзакций и определения контроля над средствами. Биткойн представляет собой одноранговую систему, в которой пользователи осуществляют транзакцию напрямую, без необходимости посредника и в которых транзакции записываются для последующей проверки всеми

узлами в публичной распределенной книге, называемой Блокчейн (Blockchain).

В работе [Lyudmyla, 2017] был проведен сравнительный фрактальный анализ для трех групп в социальной сети и курса криптовалюты биткоин. Для проведения исследований в сети Facebook были выбраны три социальные группы: Bitcoin Product/service численностью 196113 пользователей, Bitcoin Finance company численностью 70195 пользователей, группа Blockchain – 61805 пользователей. Для периода времени с 17.10.2016 по 30.06.2017 были записаны данные лайков, репостов для каждой группы и курс криптовалюты биткоин.

На рис. 5.35 показан ряд значений криптовалюты Bitcoin в период с 17 10 2016 по 30 05 2017 и соответствующие ряды Bitcoin_like и blockchain_likes.

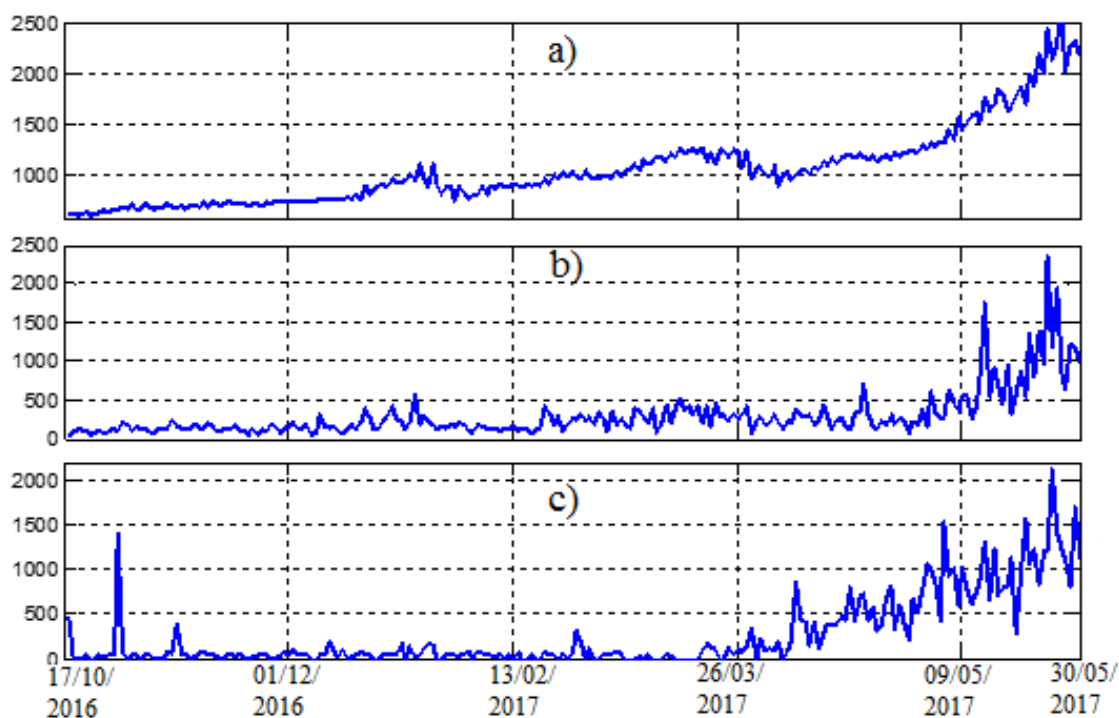


Рисунок 5.35 – Временные ряды Bitcoin (a), Bitcoin_like (b) и blockchain_like (c)

Перед проведением мультифрактального анализа, были исследованы флуктуационные функции $F(\tau)$, исследуемых временных рядов. Самоподобному поведению отвечает наличие участка с линейной зависимостью. На рис.5.36 приведен график $F(\tau)$ для временного ряда Bitcoin_like.

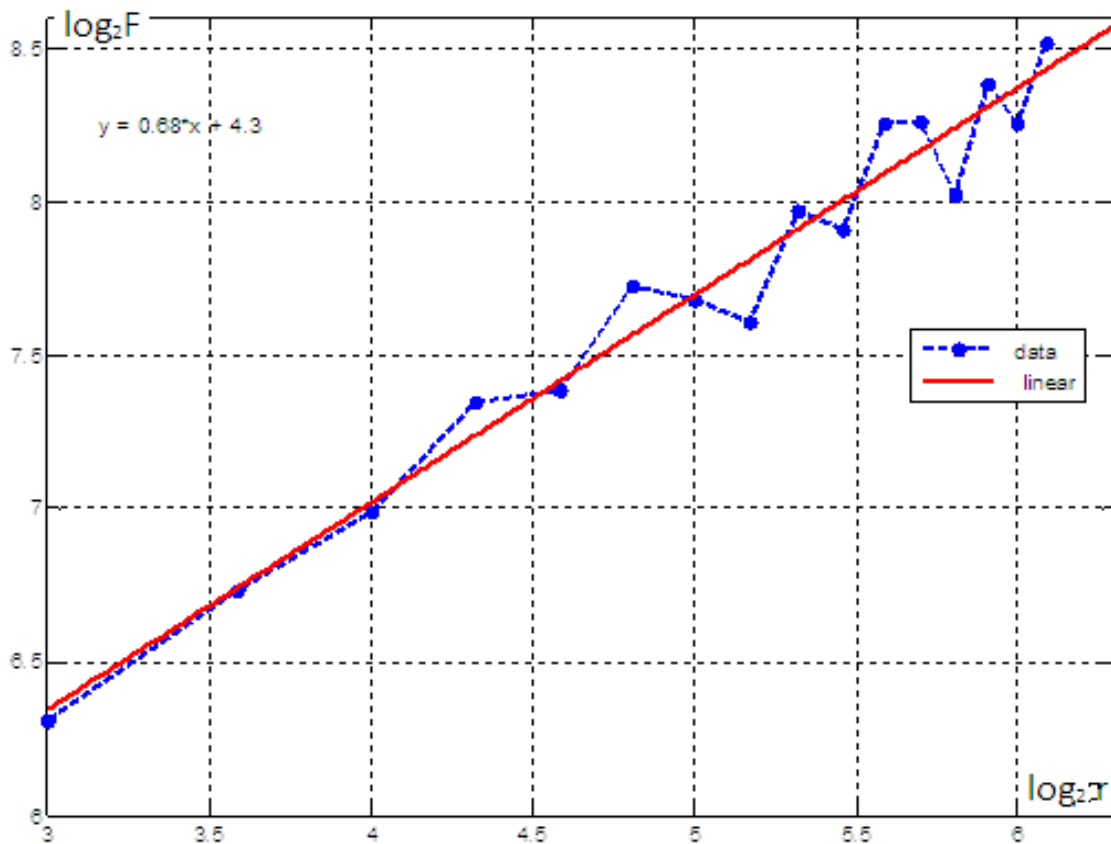


Рисунок 5.36 – Флуктуационная функция для ряда Bitcoin_like

Полученный график достаточно хорошо аппроксимируется прямой линией с углом наклона, определяющим показатель Херста $H=0.68$. Для остальных исследуемых рядов флуктуационные функции выглядят аналогично.

После исследования флуктуационных функций для рассматриваемых рядов стоимости биткоина и активностей групп, связанных с этой криптовалютой, были проведены исследования мультифрактальных свойств этих рядов. На рис.5.37 представлены функции обобщенного показателя Херста для рядов, показанных на рис 5.35.

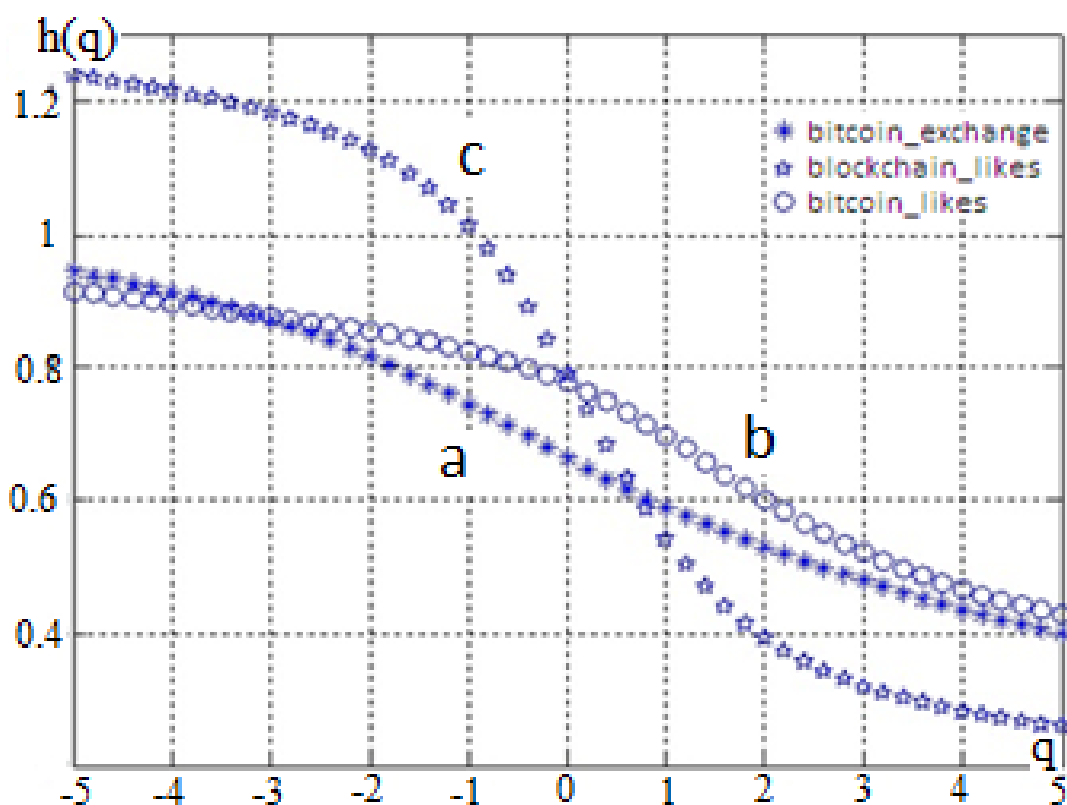


Рисунок 5.37 – Обобщенный показатель Херста рядов
(a) Bitcoin, (b) Bitcoin_like, (c) blockchain_like

Проведенные исследования показали, что ряды, имеющие корреляционную зависимость, обладают схожей мультифрактальной структурой. Корреляционный анализ взаимосвязи рядов биткоина и активностей социальных групп показал, что временные ряды Bitcoin и Bitcoin_like имеют сильную корреляцию и близкие значения

мультифрактальных характеристик, а слабая связь биткоина и ряда Blockchain_like проявляется в различии мультифрактальной структуры.

Исследование показало наличие мультифрактальных свойств для всех рядов активностей сообществ. В табл.5.2 приведены значения $h(q)$ при $q = -5, 5$ и значения показателя Херста H для исследованных рядов активностей сообществ

Таблица 5.2. Мультифрактальные характеристики для рядов активностей сообществ

	$h(q = -5)$	$h(q = 5)$	H
Bitcoin_likes	0.78	0.42	0.54
Bitcoin_reposts	0.75	0.38	0.55
BitcoinF_likes	0.95	0.52	0.63
BitcoinF_reposts	1.15	0.43	0.64
Blockchain_likes	1.23	0.25	0.41
Blockchain_reposts	1.41	0.23	0.45

Таким образом, фрактальный анализ временных рядов показал наличие самоподобных и мультифрактальных свойств как для ряда криптовалюты, так и для рядов активностей социальных групп. Результаты продемонстрировали, что ряды, имеющие корреляционную зависимость, имеют сходную мультифрактальную структуру: чем больше корреляция между фрактальными рядами, тем более сходны их фрактальные характеристики. Также исследования показали, что фрактальная структура

временных рядов криптовалюты и деятельности социальных сообществ и, как следствие, динамика их развития взаимосвязаны.

5.3 Проверка гипотезы о наличии моно и мультифрактальных свойств

Различение свойств моно- и мультифрактальности стохастического процесса по временным рядам малой длины является непростой задачей. В работах [Кириченко, 2011 (2); Kirichenko, 2014] предложен метод, позволяющий принимать или отвергать гипотезу о наличии монофрактальных свойств для временного ряда. В основе метода лежат исследования статистических характеристик выборочных значений обобщенного показателя Херста $h(q)$, которые получены методом мультифрактального детрендированного флуктуационного анализа (см. раздел 4).

Проведенный анализ выборочных законов распределения $h(q)$ показал, что оценки $h(q)$ имеют нормальное распределение, параметры которого зависят от длины реализации и выбранных значений величины q . Для реализаций мультифрактальных процессов величина $\Delta h = h(q_1) - h(q_2)$ имеет гораздо больший диапазон значений, чем для реализаций самоподобных процессов. Значение случайной величины Δh можно использовать в качестве статистического критерия для принятия гипотезы о монофрактальности ряда. Гипотеза принимается, если полученное значение попадает в область допустимых значений, численно рассчитанных для модельных монофрактальных процессов.

В работе [Kirichenko, 2014] проведен ряд исследований по выявлению моно- и мультифрактальных свойств для временных реализаций разной

природы. В таблице представлены результаты анализа выборочных значений обобщенного показателя Херста $\hat{h}(q)$ для электроэнцефалограмм лабораторных животных для разных фаз сна, финансовые ряды – индекса Доу-Джонса и цен на золото за 2004-2008 гг., и ряда средних ежедневных температур по Киеву за 2000-2006 гг. Критические значения Δh приведены на основе расчетных данных для уровня значимости $\alpha = 0.05$ и соответствующей длины ряда.

Таблица 5.3 Проверка свойства монофрактальности.

Ряд	Длина	Выборочное значение $\Delta \hat{h}$	Критическое значение Δh	
ЭЭГ (бодрств.)	1000	0.1743	0.0859	мульти
ЭЭГ (быстр. сон)		0.169		мульти
ЭЭГ (медлен. сон)		0.068		моно
Индекс Доу-	500	0.2416	0.1248	мульти
Цены на золото		0.0991		моно
Ряд температур	2000	0.0264	0.07312	моно

Результаты исследований свидетельствуют о том, что неоднородность фрактальной структуры определяется не только природой ряда, но и его локальными характеристиками. Выявив наличие или отсутствие мультифрактальных свойств, мы можем подобрать более эффективную математическую модель случайного процесса, генерирующего аналогичные временные реализации. Стоит также отметить, что обычно математические модели монофрактальных случайных процессов имеют менее громоздкий математический аппарат и являются более простыми в реализации, чем модели мультифрактальных процессов.

Выводы

1. Разработанными в работе методами исследованы реализации инфокоммуникационного трафика. Показано наличие как долгосрочной зависимости (свойства самоподобия), так и краткосрочной памяти (авторегрессионной составляющей), что позволяет представить реализацию трафика в виде суммы реализаций самоподобного процесса и процесса авторегрессии.

2. Фрактальный анализ на основе *RS*-анализа изменения показателя Херста для временных рядов потребления электроэнергии в Украине показал наличие краткосрочной и долгосрочной памяти данных стохастических процессов. Временной интервал, на котором прослеживается долгосрочная зависимость лежит в диапазоне от недели до года. Таким образом, для математического моделирования и прогнозирования процессов производства и потребления электроэнергии необходимо использовать стохастические процессы, обладающие как долгосрочной, так и краткосрочной зависимостью.

3. С применением разработанных в работе методов исследованы фрактальные свойства электроэнцефалограмм лабораторных животных, находящихся в различных фазах бодрствования и сна. Показано, что значения показателя Херста, соответствующие каждой фазе, существенно отличаются, и оценивание показателя Херста позволяет определять физиологическое состояние животного в режиме реального времени. В этом случае оптимально использовать метод оценивания, основанный на быстром вейвлет-преобразовании.

4. Проведен анализ фрактальной динамики макроэкономических финансовых показателей и курсов валют, который показал, что изменение динамики фрактальной размерности служит индикатором нестабильного

состояния системы. Результаты исследований могут быть использованы для разработки инструментов диагностики и прогнозирования критических явлений для фрактальных рядов различной природы.

5. С применением разработанных в работе методов исследованы временные ряды ежедневных значений финансовых показателей разных типов: котировки валюты, финансовые индексы, акции компаний, и показано, что они имеют мультифрактальные свойства. Показано, что мультифрактальные свойства финансовых временных рядов в предкризисный период и период спада кризиса существенно отличаются, в частности, по диапазону изменения обобщенного показателя Херста. Применение оконных методов анализа фрактальной структуры позволяет выявить изменение мультифрактальных характеристик, которые являются индикаторами кризисного состояния финансового рынка.

8. На основе разработанных методов исследованы мультифрактальные свойства электрокардиограмм и энцефалограмм. Показано, что значения функции мультифрактального спектра, для здоровых людей и пациентов, имеющих сердечную аритмию, существенно отличаются. Таким образом, мультифрактальный анализ электрокардиологических сигналов может быть использован для определения функциональных изменений в деятельности сердца. Исследованы изменения мультифрактальных характеристики ЭЭГ человека, когда он совершает какое-либо физическое действие, и когда он просто представляет, что он это делает. Результаты могут быть использованы для анализа и распознавания различных физиологических состояний организма.

9. Были проведены исследования и впервые показана мультифрактальная структура следующих природных процессов: акустических сигналов, отраженных атмосферным слоем; рядов показаний сверхлегких крутильных весов, реагирующих на солнечную активность; рядов

ежедневной температуры (максимальное, минимальное и среднее значения) по городу Киеву.

10. Проведенные исследования показали, что сейсмические волны обладают мультифрактальными свойствами и разные стадии их развития имеют различные мультифрактальные характеристики. Результаты можно использовать для разработки методики детектирования сейсмических сигналов, основанной на изменении мультифрактальных характеристик.

11. Исследована динамика сообществ в социальных группах. Проведенные исследования подтвердили, что многие временные ряды показателей активности пользователей социальных сетей обладают фрактальными свойствами и применение фрактального анализа позволяет выявить различия и обнаружить характерные черты динамики разных социальных групп.

12. Проведен анализ отношений между информацией о биткоине, содержащейся в социальных сетях, и ценой биткоина. Сравнительный фрактальный анализ для сообществ социальной сети и курса криптовалюты показал наличие самоподобных и мультифрактальных свойств как для ряда криптовалюты, так и для рядов активностей социальных групп. Результаты продемонстрировали, что фрактальная структура временных рядов криптовалюты и деятельности социальных сообществ и, как следствие, динамика их развития взаимосвязаны.

13 Представлены результаты исследований по выявлению моно- и мультифрактальных свойств временных рядов различной природы. Выявив наличие или отсутствие мультифрактальных свойств, возможно подобрать более эффективную математическую модель случайного процесса, генерирующего аналогичные временные реализации.

Литература

- [Abramenko, 2008] Abramenko, V. I. Multifractal Nature of Solar Phenomena. Solar Physics Research Trends, Edited by P. Wang, Nova Publisher, 2008. pp. 95–136.
- [Alghawli, 2015] Alghawli, Abed Saif, Kirichenko, Lyudmyla. Multifractal properties of bioelectric signals under various physiological states. International Journal «Information Content And Processing», Vol.2(2), 2015. pp.138-163.
- [Bassingthwaighte, 1994] Bassingthwaighte, J.B., Liebovitch, L.S., West, B.J. Fractal Physiology. Oxford University Press, New York, 1994.
- [Boschetti, 1996] Boschetti, F., Dentith, M. D. A fractal-based algorithm for detecting first arrivals on seismic traces. Geophysics, V. 61, N. 4, 1996. pp. 1095-1102.
- [Cao, 2005] Cao, M.-S., Ren, Q.-W., Wang, H.-H., Gong, T. A method of detecting seismic singularities using combined wavelet with fractal. Chinese journal of Geophysics, Vol.48, No. 3, 2005, pp. 740-749.
- [Ching, 2007] Ching, Emily S.C., Tsang, Yue-Kin. Multifractality and scale invariance in human heartbeat dynamics. Physical Review E, Vol. 76, 2007, 041910.
- [Cont, 2004] Cont, R., Tankov, P. Financial modelling with jump processes. Chapman & Hall, CRC Press, 2004. – 527 p
- [Crovella, 1997] Crovella, M. E., Bestavros, A. Self-similarity in Word Wide Web traffic: evidence and possible causes. IEEE/ACM Transactions on Networking, № 6 (5), 1997. pp. 835–846.
- [Dabi-Prashad, 2009] Dabi-Prashad, O., Kirichenko, L. Investigation of Time Series of Original Values of Currency Rates Measured on Small Time Frames on FOREX Using Methods of Chaos Theory. Radioelectronics & Informatics, №4, 2009. pp. 18–24.

- [Harikrishnan, 2013] Harikrishnan, K.P., Misra, R., Ambika, G. Can the multifractal spectrum be used as a diagnostic tool? *Chaotic Modeling and Simulation*, Vol. 1, 2013. pp. 51-57.
- [Ivanov, 2001] Ivanov, P., Amaral, L. N., Goldberger, A. L., Havlin, S., Rosenblum, M.G., Stanley, H., Struzik, Z.R. From $1/f$ noise to multifractal cascades in heartbeat dynamics. *Chaos*, Vol. 11, № 3, 2001. pp. 641–652.
- [Kirichenko, 2012] Kirichenko, L.O., Ostroverkh, N.V., Timko, A.V. Analysis of multifractal properties of chaotic maps. *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*. №3/9 (57), 2012. с. 53–58.
- [Kirichenko, 2014] Kirichenko, L. The method of distinction monofractal and multifractal process from time series. *Системні технології*. №6 (95), 2014. сс. 121-127.
- [Leland, 1994] Leland, W. E., Taqqu, M. S., Willinger, W., Wilson, D. V. On the self-similar nature of ethernet traffic. *IEEE/ACM Transactions of Networking*, № 2(1), 1994. pp. 1–15.
- [Lyudmyla, 2017] Lyudmyla, K., Vitalii, B., Tamara, R. Fractal time series analysis of social network activities. 2017 4th International Scientific-Practical Conference Problems of Infocommunications. Science and Technology (PIC S&T), Kharkov, Ukraine, 2017. pp. 456-459.
- [Park, 2000] Park, K., Willinger, W. Self-similar network traffic and performance evaluation. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, № 6(3), 2000. pp. 65-84.
- [Philippe, 2001] Philippe, F., Henri, K. Is there chaos in the brain? Concepts of nonlinear dynamics and methods of investigation. *Life Sciences*, Vol. 324, 2001. pp. 773–793.
- [PhysioNet] PhysioNet: the research resource for complex physiologic signals [Электронный ресурс] – Режим доступа: www.physionet.org.
- [Qingyun, 2016] Qingyun, L., Zhao, X., Willinger, W., Wang, X., Zhao, B.Y., Zheng, H. Self-Similarity in Social Network Dynamics. *ACM Trans. Model. Perform. Eval. Comput. Syst.*, Vol. 2, No. 1, Article 5, 2016.

- [Rybski, 2012] Rybski, D., Buldyrev, S.V., Havlin, S., Liljeros, F., Makse, H.A. Communication activity in a social network: relation between long-term correlations and inter-event clustering Scientific reports, №2, Article 560, 2012. Doi: 10.1038/srep00560.
- [Ryu, 2001] Ryu, B. Fractal network traffic: from understanding to implications. IEEE/ACM Transactions on Networking, № 9, 2001. pp. 634– 649.
- [Sabbione, 2010] Sabbione, J., Velis, D. Automatic first-breaks picking: New strategies and algorithms. Geophysics, V. 75, N. 4, 2010. pp. V67–V76.
- [Sheluchin, 2007] Sheluchin, O. I., Smolskiy, S. M., Osin, A. V. Self-Similar Processes in Telecommunications. New York: John Wiley & Sons, 2007, 320 p.
- [Willinger, 1996] Willinger, W., Taqqu, M. S., Erramilli, A. A. Bibliographical guide to self-similar traffic and performance modeling for modern high-speed network in «Stochastic networks: theory and applications». Oxford: Clarendon Press, 1996. 286 p
- [Yang, 2009] Yang, C.C., Sageman, M. Analysis of terrorist social networks with fractal views. Journal of Information Science, V. 35, Issue 3, 2009. pp. 299–320.
- [Архив погоды] Архив погоды по городам СНГ [Электронный ресурс]: http://thermo.karelia.ru/weather/w_history.php.
- [Дейнеко, 2010] Дейнеко, Ж. В., Кирий, В. В., Кіріченко, Л. О. Дослідження фрактальних властивостей рядів виробництва та споживання електроенергії в Україні. Наукові вісті НТУУ «КПІ», № 5 (73), 2010. Сс. 41–47.
- [Кириченко, 2006] Кириченко, Л. О., Радивилова, Т. А. Исследование долгосрочной зависимости сетевого трафика методом R/S-анализа. Автоматизированные системы управления и приборы автоматики, Вып. 135, 2006. сс. 51–55.
- [Кириченко, 2009] Кириченко, Л. О., Радивилова, Т. А. Применение фрактального анализа для обнаружения разладки временного ряда.

Компьютерные науки и технологии: первая Междунар. науч.-техн. конф., 8-10 окт. 2009 г.: сб. Трудов, Ч.2, Белгород, 2009. сс. 160–163.

[Кириченко, 2010] Кириченко, Л. О., Гранкина, Н. А., Кузьмина, О. А., Разина, М. В. Фрактальный анализ электроэнцефалограмм для состояний бодрствования и сна. Інтелектуальні системи прийняття рішень і проблеми обчислювального інтелекту (ISDMCI'2010): міжнар. наук. конф., 17–21 трав. 2010 р.: матеріали конф., Т.2, Євпаторія, 2010. сс. 381–383.

[Кириченко, 2011 (1)] Кириченко, Л. О., Дейнеко, Ж. В. Анализ самоподобных и мультифрактальных свойств временных рядов, основанный на дискретном вейвлет-преобразовании. Радиоелектроника и информатика, № 3, 2011. сс. 69–74.

[Кириченко, 2011 (2)] Кириченко, Л. О. Сравнительный мультифрактальный анализ временных рядов методами детрендированного флуктуационного анализа и максимумов модулей вейвлет-преобразования. Автоматизированные системы управления и приборы автоматики, Вып. 157, 2011. сс.66–77.

[Кириченко, 2011 (3)] Кириченко, Л. О. Исследование выборочных характеристик, полученных методом мультифрактального флуктуационного анализа. Вісник НТУУ «КПІ». Информатика, управління та обчислювальна техніка: зб. наук. пр., № 54, 2011. сс.101–111.

[Кириченко, 2014] Кириченко, Л.О., Кобицкая, Ю.А., Хабачёва, А.Ю. Детектирование сейсмических сигналов с помощью мультифрактального анализа. Матеріали 16 міжнародної науково-технічної конференції «Системний аналіз інформаційних технологій» (САІТ-2014), Київ 19-20 квітня, 2012. с. 99.

[Кириченко, 2015] Кириченко, Л.О., Хабачёва, А.Ю, Иванисенко, И.Н. Исследование зашумленных мультифрактальных рядов. Материалы международной научно-технической конференции “Информационные системы и технологии”, Харьков, ХНУРЭ, 21-27 сентября, 2015. сс. 62-63.

- [Кириченко, 2017] Кириченко, Л., Радивилова, Т., Барановский, А. Обнаружение киберугроз с помощью анализа социальных сетей. International journal "Information Technologies & Knowledge", Volume 11, Number 1, 2017. pp.23-48.
- [Леонидов, 2010] Леонидов, В. И., Семенец, В. В. Формализация описания эхограмм акустического зондирования атмосферы в зоне мегаполиса. Радиотехника, X., Вып. 160, 2010. сс. 177–183.
- [Мандельброт, 2002] Мандельброт, Б. Фрактальная геометрия природы. М., Ин-т компьютерных исследований, 2002. – 656 с.
- [Митилино, 2001] Митилино, С. Фрактальная катастрофа TCP/IP [Электронный ресурс] Компьютерное обозрение, № 9, 2001. Режим доступа: <http://itc.ua/node/5571>.
- [Петерс, 2004] Петерс, Э. Фрактальный анализ финансовых рынков. Применение теории хаоса в инвестициях и экономике : пер. с англ. М : Интернет-трейдинг, 2004. – 304 с.
- [Пугач, 2009] Пугач, А. Ф. Наблюдения астрономических феноменов с помощью крутильных весов. Physics of consciousness and life, cosmology and astrophysics, №2, 2009. сс. 30–51.
- [Федер, 1991] Федер, Е. Фракталы. М.: Мир, 1991.
- [Шелухин, 2011] Шелухин, О. И. Мультифракталы. Инфокоммуникационные приложения. М. : Горячая линия – Телеком, 2011. – 576 с.
- [Шредер, 2005] Шредер, М. Фракталы, хаос и степенные ряды. Миниатюры из бесконечного рая. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. – 528 с

Информация об авторах



Людмила Кириченко – д.т.н., профессор Харьковского национального университета радиозлектроники; пр. Науки 14, 61166, Харьков, Украина; e-mail: lyudmyla.kirichenko@nure.ua

Основные области научных исследований: самоподобные и мультифрактальные временные ряды, фрактальный анализ, вейвлет-анализ, детерминированные хаотические системы.



Тамара Радивилова – к.т.н., доцент Харьковского национального университета радиозлектроники; пр. Науки 14, 61166, Харьков, Украина; e-mail: tamara.radivilova@gmail.com

Основные области научных исследований: самоподобные и мультифрактальные временные ряды, телекоммуникационные системы, управление трафиком, информационная безопасность.

TABLE OF CONTENTS

<i>Фрактальный анализ самоподобных и мультифрактальных временных рядов Часть 2</i>	
Людмила Кириченко, Тамара Радивилова.....	103
<i>Оценивание мультифрактальных характеристик стохастических процессов</i>	
Людмила Кириченко, Тамара Радивилова.....	106
<i>Фрактальный анализ реальных данных</i>	
Людмила Кириченко, Тамара Радивилова.....	142
Table of contents.....	200