

## **ОЦЕНИВАНИЕ МУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ**

**Людмила Кириченко, Тамара Радивилова**

Мультифрактальный анализ был первоначально предложен для статистического исследования особенностей скейлинга сингулярных мер. Мультифрактальный подход предполагает, что исследуемое множество каким-то образом можно разделить на части, для каждой из которых существует свой скейлинг самоподобия. В настоящее время мультифрактальный анализ стал востребованным инструментом в разных областях науки – при изучении свойств клеточных элементов крови в биологии и диффузионного роста кластеров, в теории развитой гидродинамической турбулентности, при исследовании квазикристаллов в физике твердого тела, для анализа структуры молекул ДНК, для описания фрактальной структуры странных аттракторов и т.д. В данном разделе проведено сравнительное исследование точности оценивания мультифрактальных характеристик для двух самых популярных методов мультифрактального анализа: мультифрактального флуктуационного детрендрованного анализа и метод максимумов модулей вейвлет-преобразования.

---

### **4.1 Мультифрактальные характеристики математических моделей фрактальных стохастических процессов**

---

Для анализа точности оценивания мультифрактальных методов были использованы тестовые модельные реализации моно- и мультифрактальных стохастических процессов: фрактального броуновского движения (монофрактальный процесс),  $\alpha$  – устойчивого процесса (бифрактальный процесс) и мультифрактальных детерминированных и стохастических каскадных процессов.

Количественные мультифрактальные характеристики: обобщенный показатель Херста, скейлинговая экспонента и функция мультифрактального спектра были рассмотрены в подразделе 1.2.1.

*Фрактальное броуновское движение.* Наиболее известной и простой моделью самоподобного процесса является ФБД, рассмотренное в подразделе 1.3.1. ФБД можно рассматривать как монофрактальный процесс, у которого скейлинговая экспонента является линейной функцией показателя Херста  $H$ :

$$\begin{cases} h(q) = H, \\ \tau(q) = qH - 1, \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = H, \\ f(\alpha) = 1. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

На рис. 4.1 сверху показана типичная реализация ФБД при значении параметра  $H=0.8$  длиной 1000 значений и соответствующая ей реализация фрактального гауссовского шума. В нижней части рис. 4.1 приведены теоретические значения обобщенного показателя Херста, скейлинговой экспоненты и мультифрактального спектра для ФБД с показателем  $H=0.8$ .

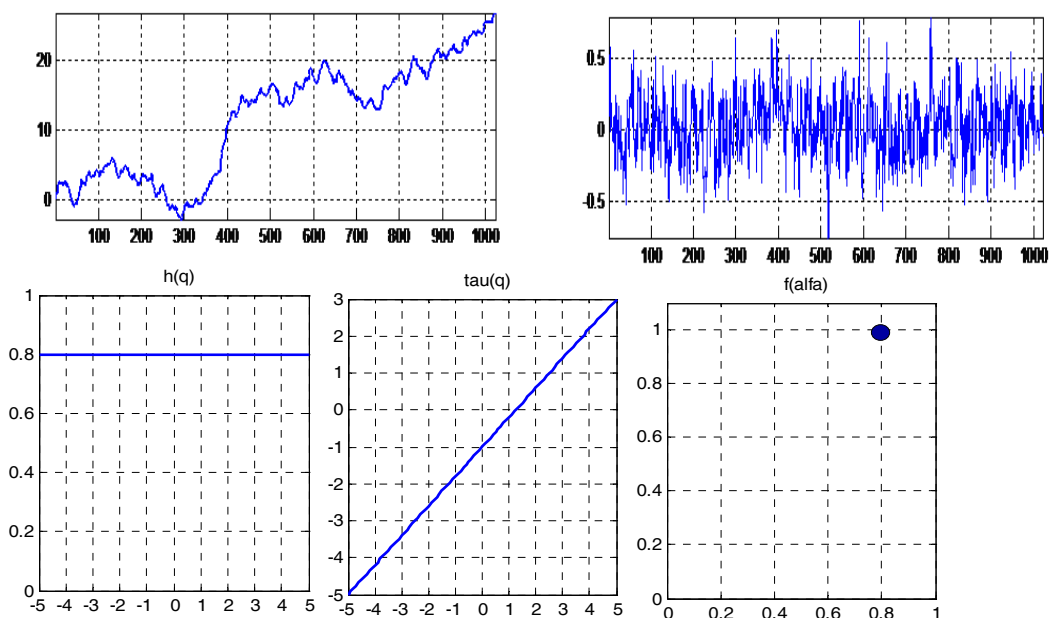


Рисунок 4.1 – Реализация ФБД (вверху слева), ряд приращений (вверху справа), теоретические значения обобщенного показателя Херста, скейлинговой экспоненты и мультифрактального спектра

$\alpha$  – устойчивые процессы (подраздел 1.3.2) обладают свойствами самоподобия. Показано [Nakao 2000], что такие процессы являются бифрактальными. Соответствующие мультифрактальные характеристики имеют вид:

$$h(q) = \begin{cases} 1/\alpha_L & q \leq \alpha_L, \\ 1/q & q > \alpha_L; \end{cases}$$

$$\tau(q) = \begin{cases} q/\alpha_L - 1 & q \leq \alpha_L, \\ 0 & q > \alpha_L; \end{cases}, \quad (4.2)$$

$$\alpha = \begin{cases} 1/\alpha_L & q \leq \alpha_L, \\ 0 & q > \alpha_L; \end{cases}$$

$$f(\alpha) = \begin{cases} 1 & q \leq \alpha_L, \\ 0 & q > \alpha_L; \end{cases}$$

где величина  $\alpha_L$  в данном случае обозначает индекс устойчивости

На рисунке 4.2 вверху показана типичная реализация процесса при значении параметра  $\alpha_L = 1.5$  длиной 1000 значений и соответствующая ей реализация приращений, являющимися с независимыми стандартными устойчивыми случайными величинами  $S_\alpha(1,0,0)$ . Реализации такого процесса имеют теоретическую бесконечную дисперсию и являются самоподобными с показателем Херста  $H = \frac{1}{\alpha_L} = \frac{2}{3}$ . В нижней части

рисунка 4.2 приведены теоретические значения обобщенного показателя Херста, скейлинговой экспоненты и мультифрактального спектра для этого процесса.

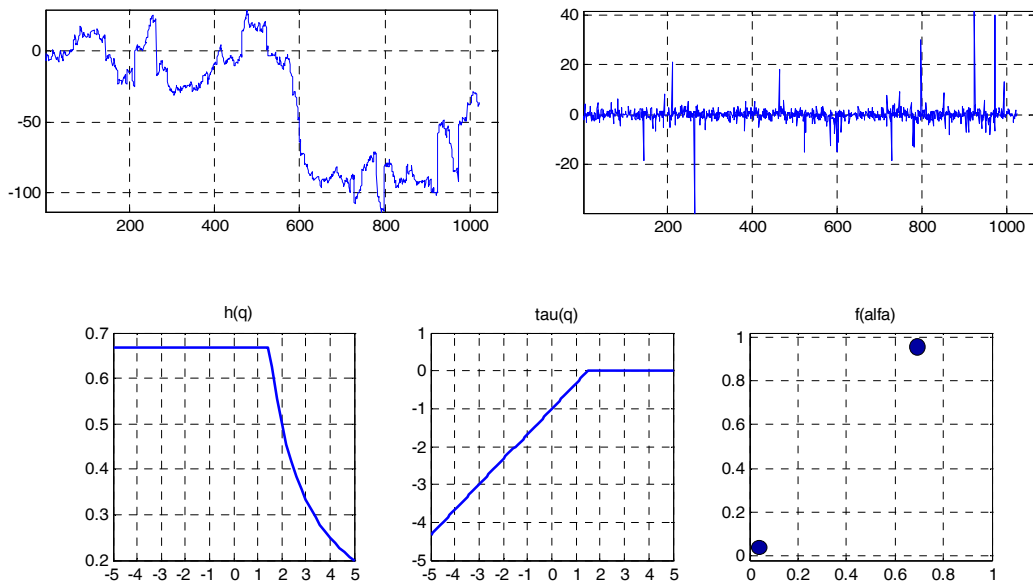


Рисунок 4.2 – Реализация  $\alpha$  –устойчивого процесса (вверху слева), ряд приращений (вверху справа), теоретические значения  $h(q)$ ,  $\tau(q)$  и  $f(\alpha)$

*Детерминированный биномиальный каскад.* Простейшей моделью мультифрактального процесса с заданными свойствами является детерминированный биномиальный каскад, рассмотренный в подразделе 1.3.3. Характеристики  $h(q)$ ,  $\tau(q)$  и  $f(\alpha)$  для биномиального мультифрактального процесса зависят только от коэффициентов  $p_1$  и  $p_2$  и определяются аналитически следующим образом:

$$\begin{aligned}
 h(q) &= \left( \frac{1}{q} - \frac{\ln(p_1^q + p_2^q)}{q \ln 2} \right), \\
 \tau(q) &= \frac{-\ln(p_1^q + p_2^q)}{\ln 2};
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = -\frac{p_1^q \ln(p_1) + p_2^q \ln(p_2)}{\ln 2(p_1^q + p_2^q)}, \\ f(\alpha) = -\frac{q}{\ln 2} \frac{p_1^q \ln(p_1) + p_2^q \ln(p_2)}{(p_1^q + p_2^q)} + \frac{\ln(p_1^q + p_2^q)}{\ln 2}. \end{array} \right.$$

На рис. 4.3 сверху показан временной ряд значений биномиального каскада при  $p_1=0.7$  и  $n=10$ , т.е. длиной реализации равной  $2^{10}$  значений. В нижней части рисунка 4.3 приведены соответствующие теоретические значения обобщенного показателя Херста, скейлинговой экспоненты и мультифрактального спектра.

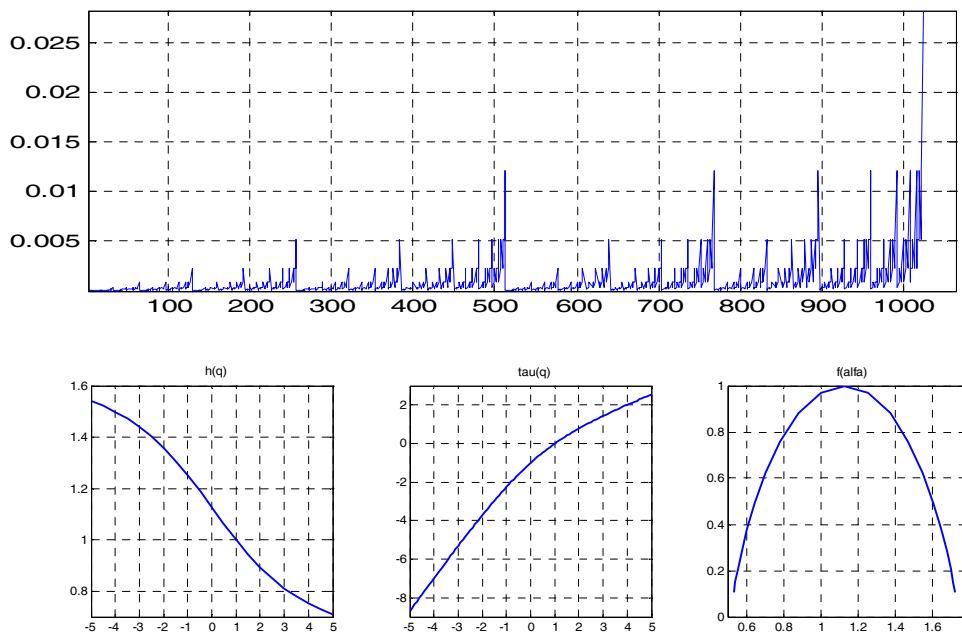


Рисунок 4.3 – Реализация биномиального каскада, теоретические значения функций  $h(q)$ ,  $\tau(q)$  и  $f(\alpha)$

*Стохастический биномиальный каскад.* При построении стохастических каскадов весовыми коэффициентами являются независимые значения некоторой заданной случайной величины  $W$  (см. подраздел 1.3.3).

Наиболее эффективно использовать случайную величину с равномерным распределением (Beta(1,1) ) на интервале [0, 1]. В этом случае можно аналитически определить скейлинговую экспоненту  $\tau(q)$  на интервале значений  $q > -1$  [Riedi, 2002]:

$$\tau(q) = -\log_2 \frac{\text{Beta}(1+q,1)}{\text{Beta}(1,1)} - 1. \quad (4.4)$$

Значения обобщенного показателя Херста  $h(q)$  и  $f(\alpha)$  были получены численно из (4.4) в соответствии с формулами (1.15) и (1.21). На рис. 4.4 вверху представлена типичная реализация биномиального стохастического каскада, у которого веса имеют равномерное распределение длиной реализации равной 1024 значения. В нижней части рис. 4.4 приведены соответствующие теоретические значения обобщенного показателя Херста, скейлинговой экспоненты и мультифрактального спектра.

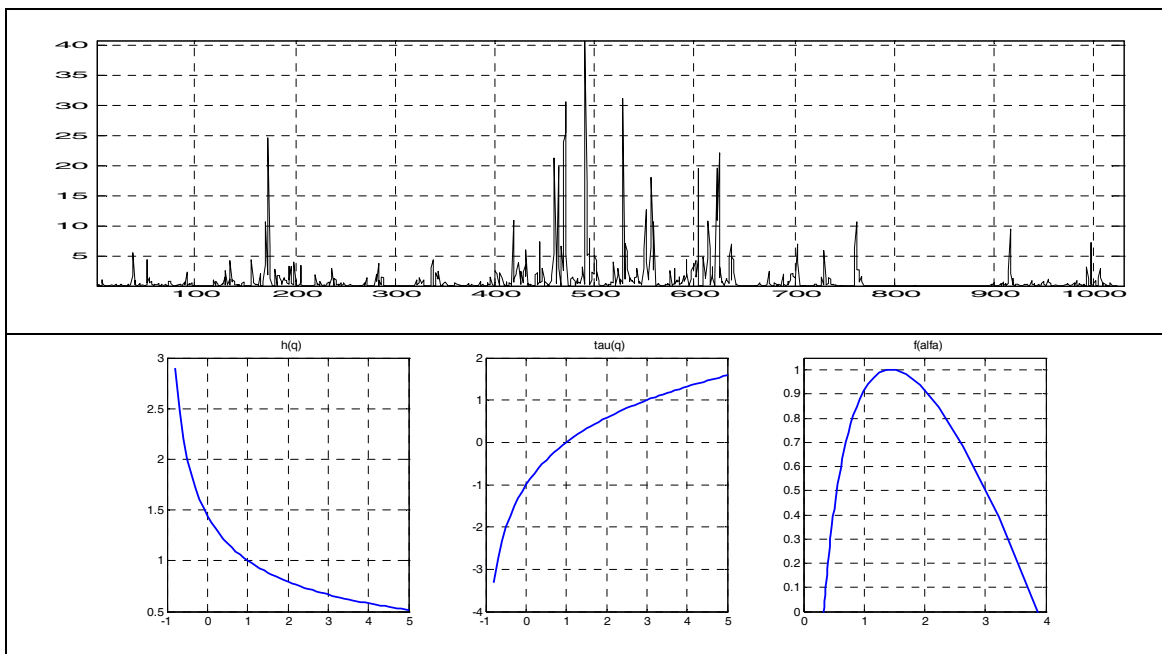


Рисунок 4.4 – Реализация стохастического каскада, теоретические значения функций  $h(q)$ ,  $\tau(q)$  и  $f(\alpha)$

---

## 4.2 Мультифрактальный флуктуационный анализ

---

Метод детрендрованного флуктуационного анализа рассмотрен в разделах 2 и 3. При проведении мультифрактального флуктуационного детрендрованного анализа (МФДФА) [Kantelhardt, 2002; Kantelhardt, 2008] исследуется зависимость флуктуационной функции  $F_q(s)$  от параметра  $q$ :

$$F_q(s) = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [F^2(s)]^{\frac{q}{2}} \right\}^{\frac{1}{q}}, \quad (4.5)$$

которая получена возведением выражения (2.14) в степень  $q$  и последующим усреднением по всем сегментам. Поскольку при  $q=0$  выражение (4.5) содержит неопределенность, то вместо него используют следующее выражение:

$$F_q(\tau) = \text{Exp} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln[F^2(\tau)] \right\}.$$

Изменяя временную шкалу  $s$  при фиксированном показателе  $q$ , находим зависимость  $F_q(s)$ , представляя её в двойных логарифмических координатах. Если исследуемый ряд сводится к мультифрактальному множеству, проявляющему долгосрочные зависимости, то флуктуационная функция  $F_q(s)$  представляется степенной зависимостью

$$F_q(s) \propto s^{h(q)}, \quad (4.6)$$

где  $h(q)$  - функция обобщенного показателя Херста.

Из выражения (4.5) следует, что при  $q=2$  этот показатель сводится к обычному значению параметра Херста  $H$ .

На рисунке 4.5 представлены флуктуационные функции  $F_q(s)$  для монофрактального (слева) и мультифрактального (справа) процессов для значений параметра  $q = \{-5, -2, 0, 2, 5\}$ .

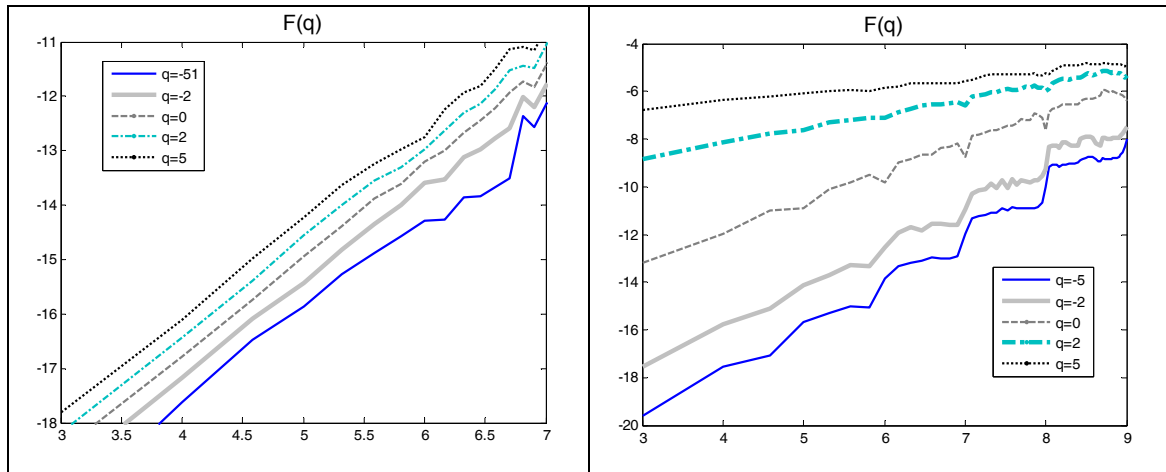


Рисунок 4.5 –  $F_q(s)$  для монофрактального (слева) и мультифрактального (справа) процессов

На рисунке 4.6 представлены функции обобщенного показателя Херста  $h(q)$ , полученные по реализациям детерминированного биномиального каскада при значениях весового коэффициента  $p_1 = \{0.6, 0.7, 0.8, 0.9\}$ .

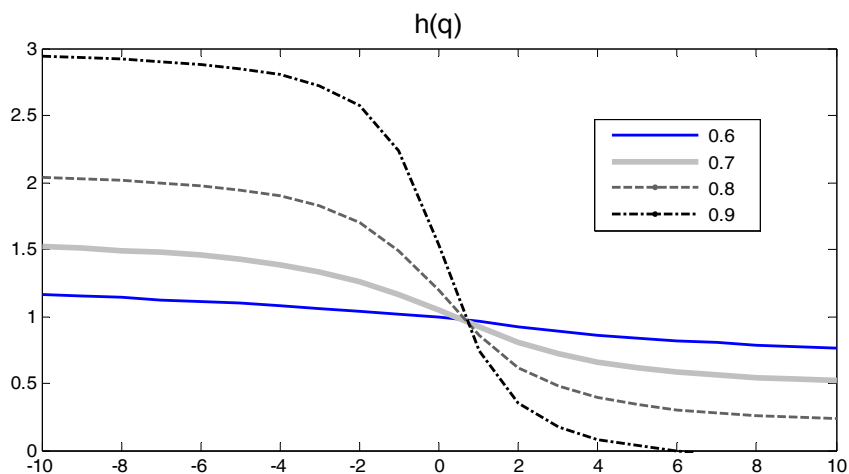


Рисунок 4.6 – Функции  $h(q)$  для реализаций детерминированного каскада при разных значениях  $p_1$ .



Для временных рядов, которые отвечают монофрактальному множеству, флуктуационная функция  $F_q(s)$  одинакова для всех сегментов, и обобщенный показатель Херста  $h(q) = H$  не зависит от параметра  $q$ . Для мультифрактальных рядов  $h(q)$  является нелинейной функцией: при положительных  $q$  основной вклад в функцию  $F_q(s)$  дают сегменты, проявляющие большие отклонения  $F^2(s)$ , а при отрицательных  $q$  доминируют сегменты с малыми дисперсиями  $F^2(s)$ . Таким образом, при отрицательных значениях  $q$  обобщенный показатель Херста  $h(q)$  описывает сегменты, проявляющие малые флуктуации, а при положительных – большие.

Исходя из вышеуказанного можно предложить следующий пошаговый алгоритм оценивания мультифрактальных характеристик по временному ряду  $X(t)$ ,  $t = 1, 2, \dots, n$ .

1. Для расчета необходимо преобразовать исходный ряд в кумулятивный

$X^{cum}(k) = \sum_{t=1}^k X(t)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Если исходный ряд уже является кумулятивным, данный шаг пропускается.

2. Задаются значения параметра  $q$ , в диапазоне которых требуется найти значения мультифрактальных характеристик  $h(q)$ ,  $\tau(q)$ ,  $f(\alpha)$ .

3. Ряд  $X^{cum}(t)$  разбивается на  $N$  неперекрывающихся сегментов длиной  $\tau$  и для каждого сегмента  $X^{cum}(t)$  вычисляется флуктуационная функция

$$F^2(\tau) = \frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} (X^{cum}(t) - Y_m(t))^2, \quad (4.7)$$

где  $Y_m(t)$  – локальный  $m$ -полиномиальный тренд в пределах данного сегмента.

4. Функция  $F(\tau)$  усредняется по всему ряду  $X^{cum}(t)$

$$F(\tau) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_i^2(\tau)},$$

5. Вычисляется флуктуационная функция для значения  $q$ :

$$F_q(\tau) = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [F_i^2(\tau)]^{\frac{q}{2}} \right\}^{\frac{1}{q}}, \quad (4.8)$$

6. Значение  $\tau$  увеличивается и шаги 3–5 повторяются.

7. Строится линейная регрессия методом наименьших квадратов на  $\log(\tau)$ , как независимой переменной, и  $\log F_q(\tau)$ , как зависимой переменной. Тангенс угла наклона прямой, аппроксимирующей полученные точки, определяет значение величины  $h(q)$  для заданного значения  $q$ .

7. Выполнив шаги 2-6 для всех заданных значений параметра  $q$ , получаем зависимость  $h(q)$ .

8. Значения скейлинговой экспоненты  $\tau(q)$  определяются по формуле (1.15); значения функции мультифрактального спектра  $f(\alpha)$  находятся с помощью преобразования Лежандра согласно (1.21).

---

### 4.3 Метод максимумов модулей вейвлет-преобразования

---

Метод максимумов модулей вейвлет-преобразования базируется на математическом аппарате вейвлет-анализа [Muzy, 1991; Muzy, 1993]. Непрерывное вейвлет-преобразование функции  $X(t)$  имеет вид

$$W(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} X(t)\Psi_{ab}(t)dt, \quad (4.9)$$

где  $\Psi_{ab}(t)$  - вейвлет-функция с параметрами масштаба  $a$  и сдвига  $b$ .

Алгоритм ММВП предполагает исследование поведения функции  $X(t)$  в два этапа. На первом этапе выполняется вейвлет-преобразование по формуле (4.9). Результат вейвлет-преобразования – функция  $W(a,b)$  – является вейвлет–спектром и может быть представлена как поверхность вейвлет-коэффициентов в трехмерном пространстве. На рис. 4.7 вверху приведена реализация детерминированного биномиального каскада при значении весового коэффициента  $p_1 = 0.7$ . В средней части рис. 4.7 представлена поверхность вейвлет-коэффициентов  $W(a,b)$  для данной реализации. Наиболее важная информация содержится в линиях локальных экстремумов  $W(a,b)$  (рис. 4.7 внизу), поиск которых проводится на каждом масштабе  $a$ .

Выбор вейвлет-функции, обладающей нулевыми моментами  $m$ -го порядка (3.7), определяется несколькими аспектами. С одной стороны, большое значение  $m$  позволяет проигнорировать крупномасштабные полиномиальные тренды и анализировать мелко-масштабные вариации функции  $X(t)$ . С другой стороны, увеличение числа нулевых моментов приводит к увеличению числа линий локальных экстремумов вейвлет-коэффициентов и появлению большого числа дополнительных линий, обрывающихся на малых масштабах [Павлов, 2007]. Такие линии являются слишком короткими для оценивания степенных зависимостей, и становятся помехами при проведении численного анализа сингулярностей.

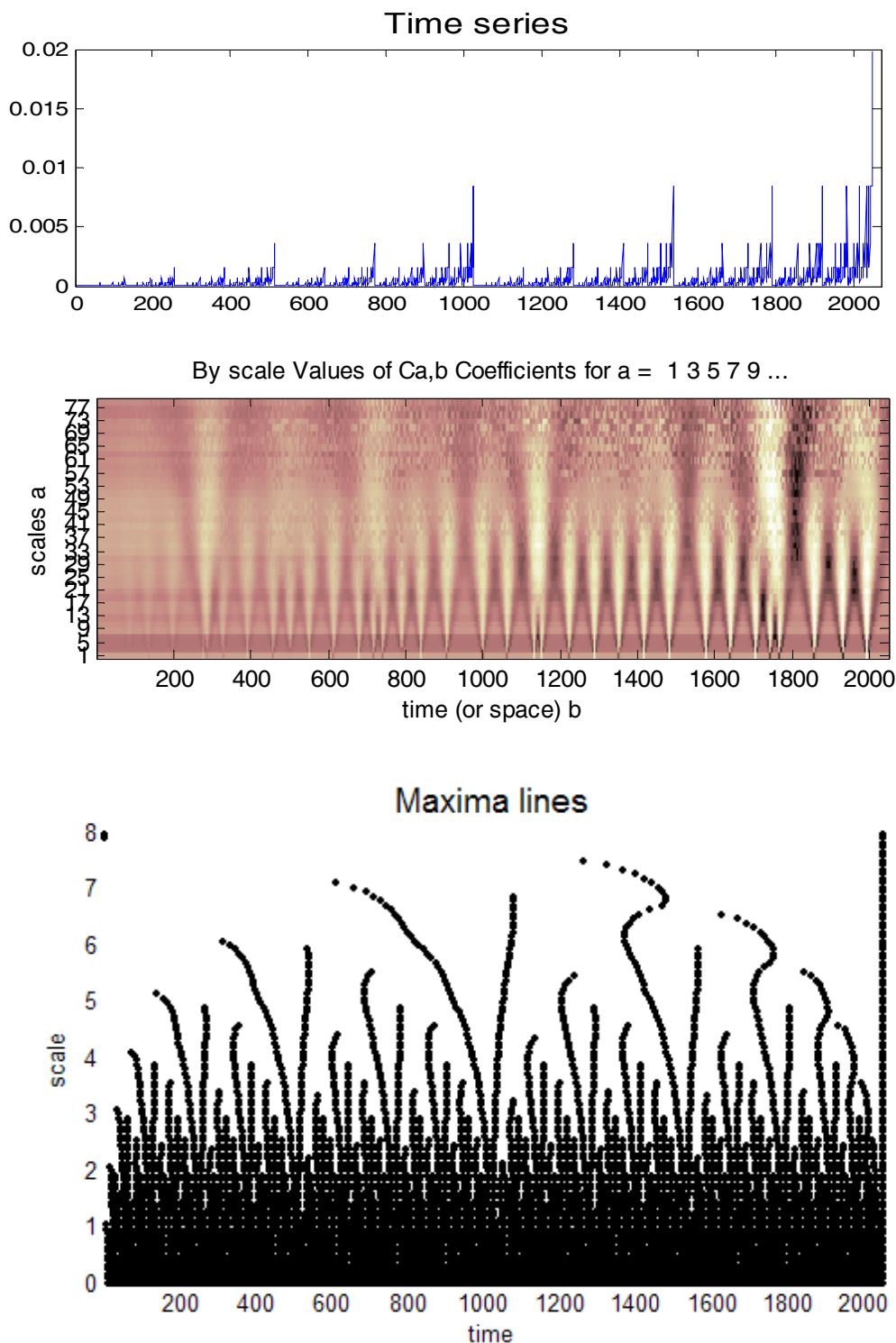


Рисунок 4.7 – Реализация биномиального каскада, поверхность вейвлет-коэффициентов, линии локальных максимумов

Обычно в качестве материнских вейвлет-функций используются вейвлеты семейства Гаусса. Если взяты производные высокого порядка функции Гаусса, то число дополнительных коротких линий локальных макси-мумов  $W(a, t)$  возрастает, что обуславливается осциллирующими «хвостами» вейвлет-функций. Поэтому при проведении мультифрактального анализа целесообразно ограничиваться значением  $m = 2$ . [Музы, 1993].

Выделением «скелетона» заканчивается первый шаг алгоритма ММВП. Второй шаг метода ММВП заключается в расчете статистической суммы (частичной функции):

$$Z(q, a) = \sum_{l \in L(a)} \left( \sup_{a' \leq a} |W(a', x_l(a'))| \right)^q, \quad (4.10)$$

где  $L(a)$  – множество всех линий  $l$  максимумов модулей вейвлет-коэффициентов на масштабе  $a$ ;  $x_l(a)$  – расположение максимума на этом масштабе.

Для вычисления  $Z(q, a)$  выбирается максимальное значение модуля вейвлет-коэффициентов вдоль каждой линии на масштабах, меньших заданного значения масштаба  $a$ . В этом случае выполняется зависимость

$$Z(q, a) \propto a^{\tau(q)}, \quad (4.11)$$

где  $\tau(q)$  – скейлинговая экспонента, которую определяют для каждого значения  $q$  путем вычисления тангенса угла наклона  $\ln Z(q, a)$  от  $\ln a$ .

Основанный на вейвлет-преобразовании мультифрактальный анализ позволяет исследовать сингулярности при отрицательных значениях  $q$  [Павлов 2007]. Частичные функции  $Z(q, a)$  при  $q < 0$  характеризуют особенности скейлинга для слабых сингулярностей (малых флуктуаций), а при  $q > 0$  – для сильных сингулярностей (больших флуктуаций).

На рис. 4.8(а) представлены статистические суммы  $Z(q, a)$ , полученные по реализации детерминированного каскада при  $p_1 = 0.8$  для значений  $q = \{-5, -2, 0, 2, 5\}$ . На рис. 4.8(б) показаны  $\tau(q)$  для мультифрактальной (каскад,  $p_1 = 0.8$ ) и монофрактальной (ФБД,  $H = 0.8$ ) реализаций.

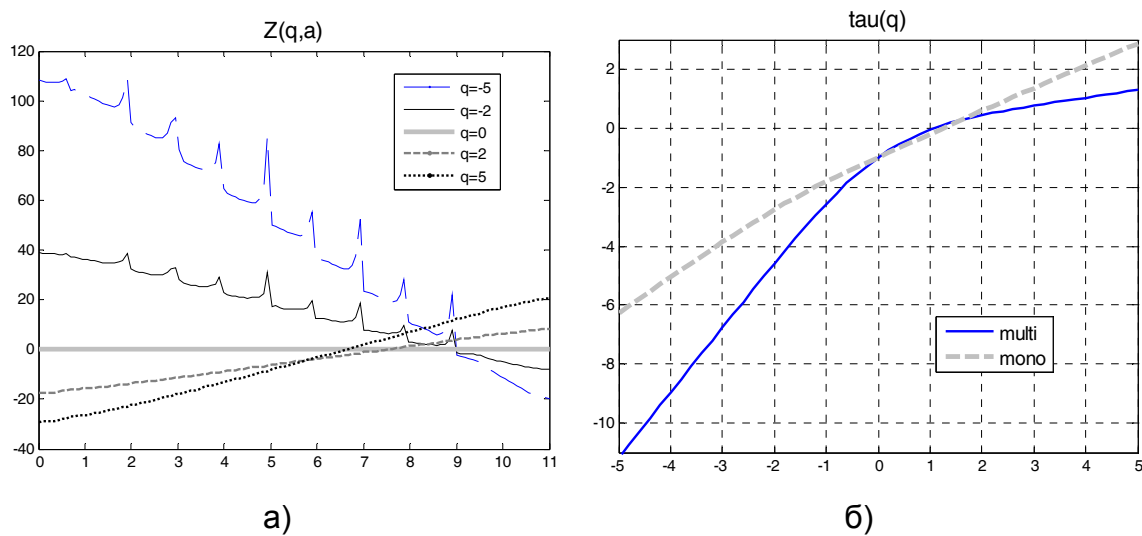


Рисунок 4.8 – Функции  $Z(q, a)$  для детерминированного каскада при разных  $q$  (а); функции  $\tau(q)$  для монофрактальной и мультифрактальной реализаций (б)

Можно предложить следующий пошаговый алгоритм оценивания мультифрактальных характеристик по временному ряду  $X(t)$ ,  $t = 1, 2, \dots, n$ .

1. Для расчета необходимо преобразовать исходный ряд в кумулятивный

$$X^{cum}(k) = \sum_{t=1}^k X(t), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Если исходный ряд уже является кумулятивным, данный шаг пропускается

2. Для данного ряда выполняется вейвлет-преобразование по формуле (4.10) и находится спектр вейвлет-коэффициентов  $W(a,b)$ .
3. Для поверхности  $W(a,b)$  определяется множество линий локальных максимумов.
4. Задаются значения параметра  $q$ , в диапазоне которых требуется найти значения мультифрактальных характеристик  $h(q)$ ,  $\tau(q)$ ,  $f(\alpha)$ .
5. В соответствии с формулой (4.10) вычисляется частичная функция  $Z(q,a)$  для заданного значения  $q$  и заданных значений масштаба  $a$
6. В соответствии с (4.10) строится линейная регрессия  $\log(a)$ , как независимой переменной, и  $\log Z(q,a)$ , как зависимой переменной Тангенс угла наклона прямой, аппроксимирующей полученные точки, определяет значение величины  $\tau(q)$  для заданного значения  $q$ .
5. Выполнив шаги 4-6 для всех заданных значений параметра  $q$ , получаем значения скейлинговой экспоненты  $\tau(q)$ .
7. Значения обобщенного показателя Херста  $h(q)$  определяются по формуле (1.15); значения функции мультифрактального спектра  $f(\alpha)$  находятся с помощью преобразования Лежандра согласно (1.21).

---

#### **4.4 Сравнительный анализ оценок мультифрактальных характеристик, полученных разными методами**

---

В работах [Кириченко, 2011, 1; Кириченко, 2011, 2; Kirichenko, 2014] представлены результаты численного эксперимента, в ходе которого моделировались реализации разных типов фрактальных стохастических процессов: фрактального броуновского движения (монофрактальный процесс) и мультифрактальных детерминированных и стохастических каскадных процессов. Длина реализаций была выбрана равной 256, 512, 1024 и 2048 значений. Для каждого сгенерированного временного ряда

методами МФДФА и ММВП рассчитывалась мультифрактальные характеристики  $h(q)$ ,  $\tau(q)$  и  $f(\alpha)$ , которые потом усреднялись по множеству реализаций. Значения параметра  $q$  изменялись в диапазоне  $-5 \leq q \leq 5$ . В работах [Kantelhardt, 2008; Павлов, 2007] показано, что большие значения параметра  $q$  приводят к большим погрешностям.

Поскольку функции  $h(q)$ ,  $\tau(q)$  и  $f(\alpha)$  взаимно-однозначно связаны, для количественного оценивания степени близости к теоретическим характеристикам достаточно оценить только по одной функции обобщенного показателя Херста  $h(q)$ :

$$\Delta h = \frac{1}{n_q} \sum_q \left| \hat{h}(q) - h_T(q) \right| \quad (4.12)$$

где  $h_T(q)$  – теоретическое значение функции обобщенного показателя Херста;  $\hat{h}(q)$  – выборочное значение функции;  $n_q$  – число значений параметра  $q$ ;  $\Delta h$  – среднее отклонение выборочного значения от теоретического.

Имеет смысл вместо одной величины  $\Delta h$  рассматривать отдельно несколько ее составляющих, поскольку методы могут иметь различные погрешности для положительных и отрицательных значений параметра  $q$ :  $\Delta h(q < 0)$ ,  $\Delta h(q > 0)$ . Т.к. значение  $q = 0$  является точкой, требующей особых вариантов вычисления  $\hat{h}(q)$ , отклонения в этой точке можно не учитывать. Также необходимо выделить величину

$$\Delta H = \left| \hat{h}(2) - h_T(2) \right| \quad (4.13)$$

где величина  $\Delta H$  представляет отклонение показателя Херста.



#### 4.4.1 Оценивание монофрактальных реализаций

Рассмотрим оценивание мультифрактальных характеристик для реализаций монофрактального процесса, которым является ФБД.

Рассмотрим выборочные мультифрактальные характеристики, полученные методом МФДФА по реализациям ФБД разной длины. На рис. 4.9 представлены выборочные значения обобщенного показателя Херста рассчитанного в соответствии с (4.5) и функции мультифрактального спектра, полученной численно реализованными преобразованиями Лежандра. Выборочные функции  $\tau(q)$  визуально очень близки друг другу, поэтому их графики здесь не приведены. Прямой линией на графике выборочной функции  $h(q)$  показаны ее теоретические значения. Хотя теоретический мультифрактальный спектр  $f(\alpha)$  представляет собой точку  $(0.8,1)$ , выборочный спектр  $f(\alpha)$  демонстрирует мультифрактальные свойства.

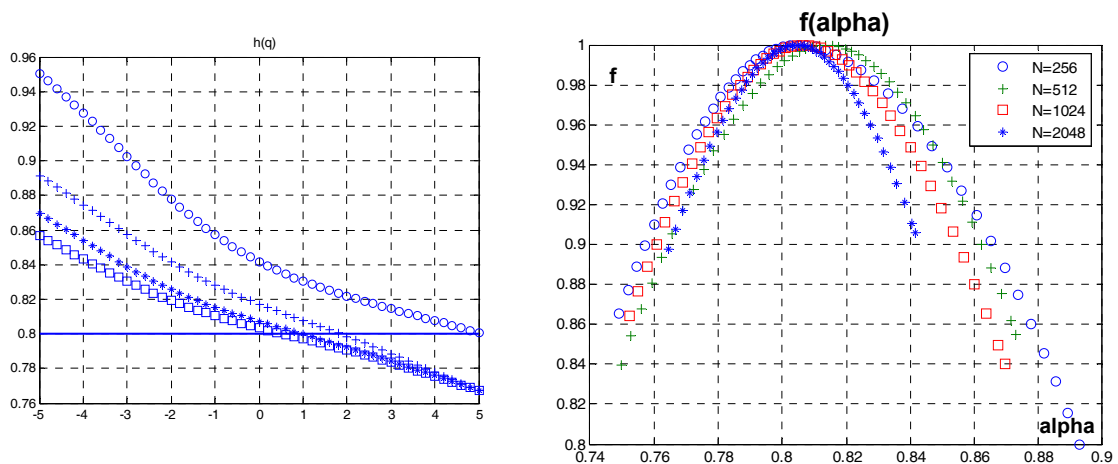


Рисунок 4.9 – Функции  $h(q)$  и  $f(\alpha)$ , полученные методом МФДФА

На рисунке 4.10 представлены выборочные значения функции обобщенного показателя Херста и мультифрактального спектра, полученные по реализациям ФБД разной длины методом ММВП.

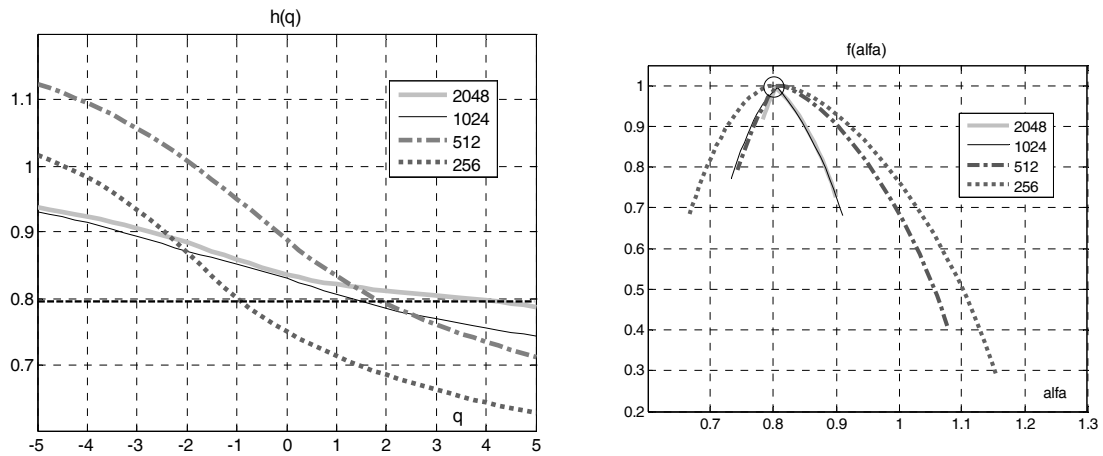


Рисунок 4.10 – Выборочные функции  $h(q)$  и  $f(\alpha)$  для реализаций ФБД, полученные методом ММВП

С увеличением длины реализации выборочные характеристики стремятся к своим теоретическим значениям. Однако, при небольшом числе значений во временном ряде, полученные оценки характеристики демонстрируют ложные мультифрактальные свойства. Очевидно, что оценки мультифрактальных характеристик, полученные методом МФДФА, значительно ближе к своим теоретическим значениям, чем оценки, построенные с применением ММВП. К тому же, при использовании метода ММВП, построение вейвлет-спектра, линий локальных максимумов, выбор подходящего диапазона изменения масштаба вейвлет-преобразования, представляет собой значительно более сложную задачу, чем определение степени полинома и диапазона длин сегментов для флуктуационного анализа.

В таблице 4.1 приведены отклонения выборочных функций от теоретических значений, которые подтверждают преимущества метода МФДФА при анализе монофрактальных процессов.

**Таблица 4.1 – Отклонения выборочных функций для монофрактальных реализаций**

Длина ряда	Метод	$\Delta H$	$\Delta h (q < 0)$	$\Delta h (q > 0)$
256	ММВП	0.12	0.18	0.13
	МФДФА	0.02	0.094	0.018
512	ММВП	0.008	0.3	0.026
	МФДФА	0.004	0.06	0.015
1024	ММВП	0.028	0.27	0.023
	МФДФА	0.0077	0.035	0.014
2048	ММВП	0.01	0.15	0.007
	МФДФА	0.009	0.025	0.014

#### 4.4.2 Оценивание бифрактальных реализаций

Рассмотрим выборочные мультифрактальные характеристики, полученные методом МФДФА по реализациям  $\alpha$  – устойчивого процесса разной длины. На рисунке 4.11 представлены выборочные значения обобщенного показателя Херста и функции мультифрактального спектра. Выборочные функции  $\tau(q)$  визуальны очень близки друг другу, поэтому их графики здесь не приведены. Пунктирной линией на графике выборочной функции  $h(q)$  показано теоретическое значения. Хотя теоретический мультифрактальный спектр  $f(\alpha)$  представляет собой две точки  $(0,0)$  и

$(2/3, 1)$ , выборочный спектр  $f(\alpha)$  демонстрирует мультифрактальные свойства.

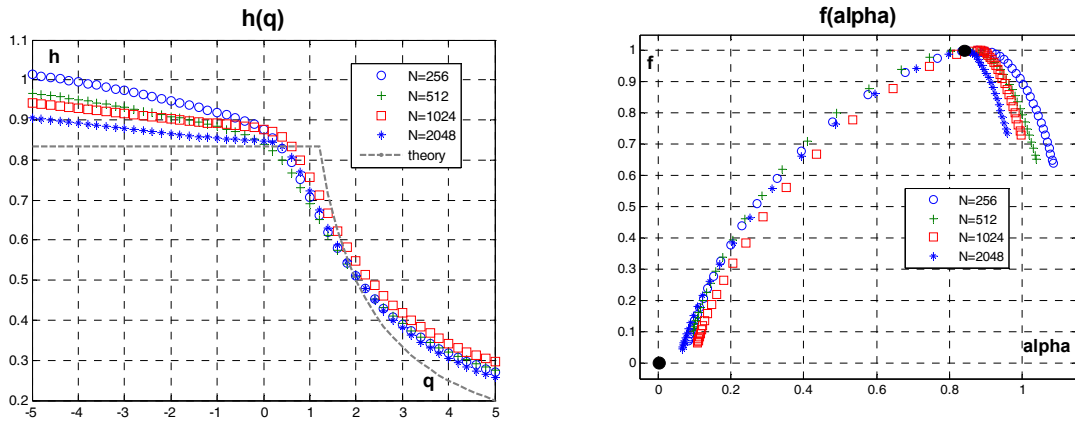


Рисунок 4.11 – Выборочные функции  $h(q)$  и  $f(\alpha)$  для реализаций  $\alpha$  – устойчивого процесса, полученные методом МФДФА

На рисунке 4.12 представлены выборочные значения функции обобщенного показателя Херста и мультифрактального спектра, полученные по реализациям  $\alpha$  – устойчивого процесса разной длины методом ММВП.

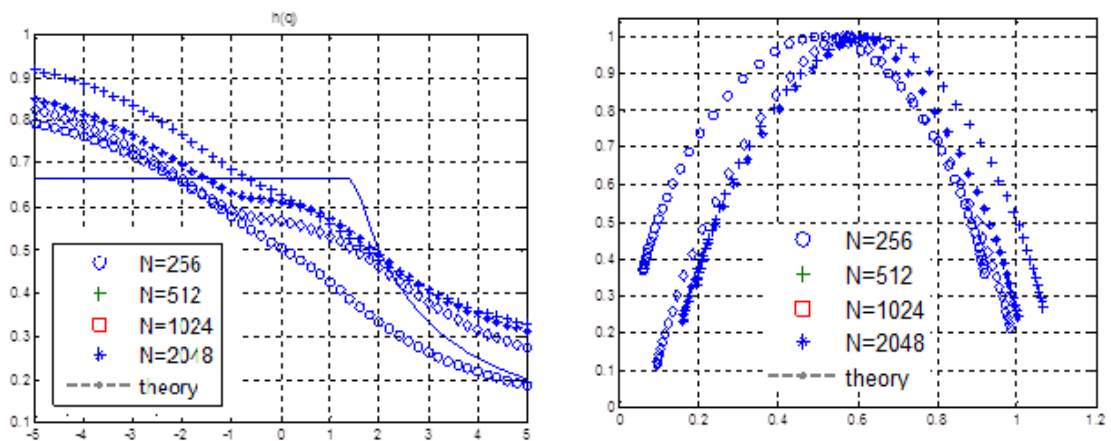


Рисунок 4.12 – Выборочные функции  $h(q)$  и  $f(\alpha)$  для реализаций  $\alpha$  – устойчивого процесса, полученные методом ММВП

С увеличением длины реализации выборочные характеристики стремятся к своим теоретическим значениям. Однако, полученные оценки характеристики демонстрируют ложные мультифрактальные свойства. В спектре  $f(\alpha)$ , как и в случае оценивания характеристик для ряда броуновского движения, характерно наличие ложных точек, что может привести к неправильным выводам о мультифрактальных свойствах реализаций. Оценки мультифрактальных характеристик, полученные методом МФДФА, ближе к своим теоретическим значениям, чем оценки, построенные с применением ММВП, о чем свидетельствуют данные таблицы 4.2.

В таблице 4.2 приведены отклонения выборочных функций от теоретических значений, которые подтверждают большую точность метода МФДФА при анализе процессов с дискретным фрактальным спектром. Результаты вычислений подтверждают результаты, полученные в работах [Kantelhardt, 2002; Oswiecimka, 2006] для реализаций длиной более 60000 значений.

**Таблица 4.2 – Отклонения выборочных функций для бифрактальных реализаций**

Длина ряда	Метод	$\Delta H$	$\Delta h (q < 0)$	$\Delta h (q > 0)$
256	ММВП	0.167	0.076	0.12
	МФДФА	0.001	0.096	0.056
512	ММВП	0.025	0.13	0.086
	МФДФА	0.004	0.064	0.058
1024	ММВП	0.076	0.08	0.07
	МФДФА	0.011	0.057	0.05
2048	ММВП	0.006	0.08	0.07
	МФДФА	0.003	0.054	0.041

#### 4.4.3 Оценивание реализаций детерминированного биномиального каскада

Рассмотрим оценивание мультифрактальных характеристик для реализаций детерминированного мультипликативного биномиального каскада. В отличие от реализаций остальных случайных процессов, где для каждой сгенерированной реализации рассчитывались выборочные характеристики, которые потом усреднялись, в этом случае оценки не усреднялись: для каждой реализации был только один набор мультифрактальных характеристик, полученных разными методами.

Рассмотрим выборочные мультифрактальные характеристики, полученные методом МФДФА по реализациям детерминированного каскада с начальным весовым коэффициентом  $p_1 = 0.7$  разной длины. На рис. 4.13 представлены выборочные значения обобщенного показателя Херста и функции мультифрактального спектра. Пунктирной линией на графике выборочных функций  $h(q)$  и  $f(\alpha)$  показаны их теоретические значения.

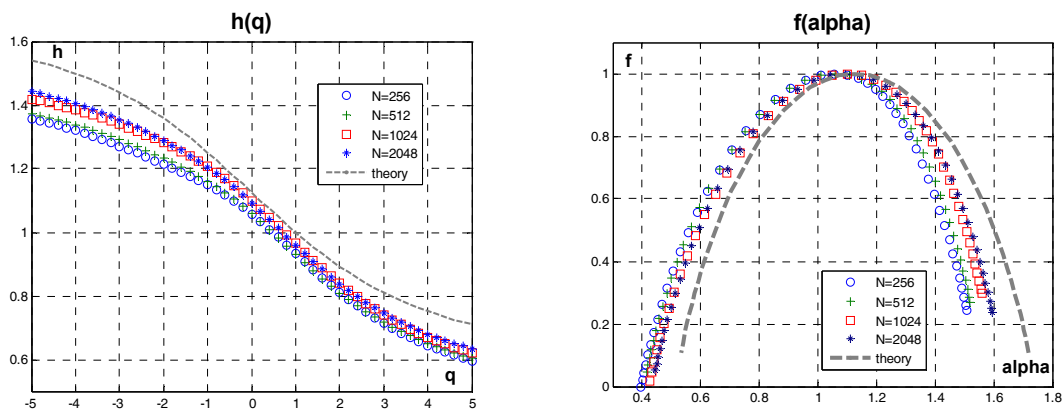


Рисунок 4.13 – Выборочные функции  $h(q)$  и  $f(\alpha)$  для реализаций детерминированного биномиального каскада, полученные методом МФДФА

При оценивании рядов с мультифрактальными свойствами метод ММВП позволяет получить оценки, лучшие по своим статистическим характеристикам с оценками, полученными методом МФДФА (в смысле большей близости к теоретическим значениям). Это очевидно при сравнении рис. 4.13 и рис. 4.14, где представлены выборочные функции, полученные с помощью непрерывного вейвлет-преобразования, а так же при сравнении величин отклонений оценок от теоретических значений, приведенных в таблице 4.3.

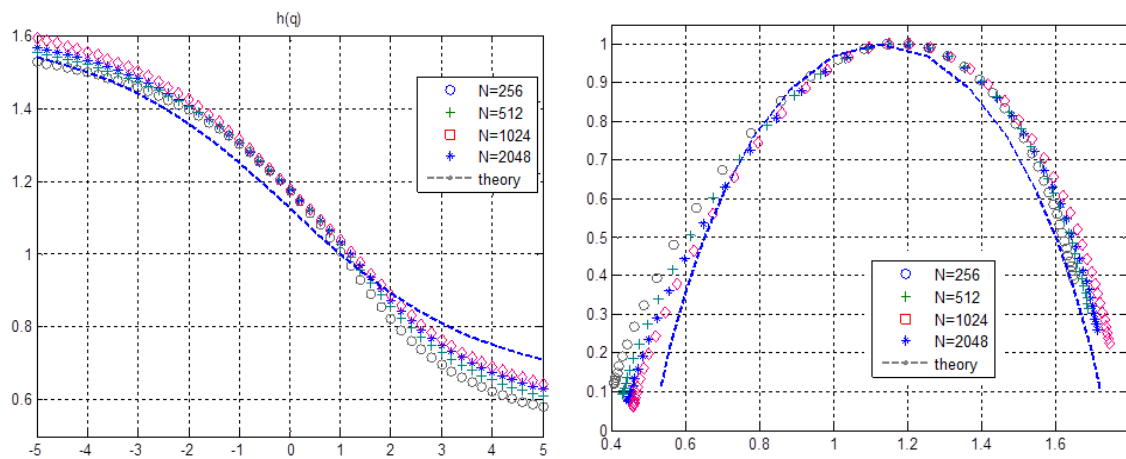


Рисунок 4.14 – Выборочные функции  $h(q)$  и  $f(\alpha)$  для реализаций детерминированного биномиального каскада, полученные методом ММВП

При небольшом числе значений во временном ряде его выборочные фрактальные характеристики демонстрируют смещение диапазона значений. В обоих случаях с увеличением длины реализации выборочные характеристики стремятся к своим аналитическим значениям. Необходимо отметить, что характеристики, полученные на основе метода ММВП, очень чувствительны к изменению масштаба диапазона вейвлет-преобразования, в то время как метод флуктуационного анализа позволяет получать устойчивые оценки.

В таблице 4.3 приведены отклонения выборочных функций от теоретических значений, которые показывают определенные преимущества метода, основанного на вейвлет-преобразованиях, при анализе процессов с непрерывным мультифрактальным спектром.

**Таблица 4.3 – Отклонения выборочных функций для реализаций детерминированного каскада**

Длина ряда	Метод	$\Delta H$	$\Delta h (q < 0)$	$\Delta h (q > 0)$
256	ММВП	0.07	0.026	0.084
	МФДФА	0.24	0.27	0.23
512	ММВП	0.039	0.037	0.064
	МФДФА	0.17	0.15	0.17
1024	ММВП	0.02	0.043	0.051
	МФДФА	0.14	0.12	0.13
2048	ММВП	0.006	0.059	0.042
	МФДФА	0.12	0.06	0.11

#### 4.4.4 Оценивание реализаций стохастического биномиального каскада

Рассмотрим оценивание мультифрактальных характеристик для реализаций стохастических мультипликативных биномиальных каскадов, весовые коэффициенты которых имеют равномерное распределение. Для



сравнения с аналитическими характеристиками (4.4) вычисления проводились в диапазоне значений параметра  $-1 < q < 5$ .

На рисунке 4.15 представлены выборочные значения обобщенного показателя Херста и функции мультифрактального спектра, полученные методом МФДФА по реализациям стохастического каскада разной длины. Пунктирной линией на графике выборочных функций  $h(q)$  и  $f(\alpha)$  показаны их теоретические значения. Оценки показывают хорошую согласованность с теоретическими значениями в области положительных значений параметра  $q$ . Численные значения расхождений приведены в таблице 4.4. Поскольку отрицательные значения параметра  $q$  ограничены диапазоном  $-1 < q < 0$ , правая часть мультифрактального спектра  $f(\alpha)$  представлена недостаточно полно.

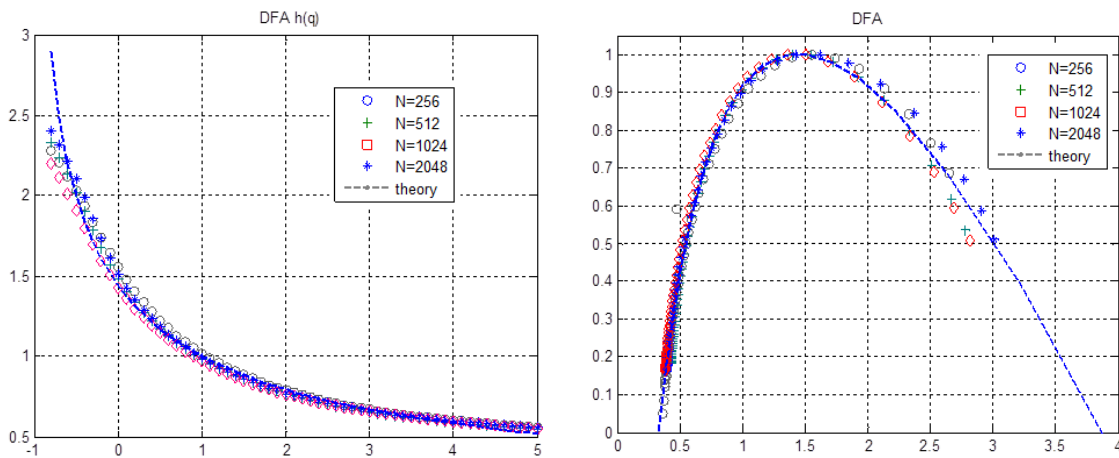


Рисунок 4.15 – Выборочные функции  $h(q)$  и  $f(\alpha)$  для реализаций детерминированного биномиального каскада, полученные методом МФДФА

При оценивании рядов стохастических мультифрактальных каскадов метод ММВП показал оценки, намного уступающие по своим статистическим свойствам оценкам, полученными методом МФДФА в смысле большей близости к теоретическим значениям. Это очевидно при сравнении рисунков 4.15 и 4.16, где представлены выборочные функции, а так же при сравнении величин отклонений оценок от теоретических значений, приведенных в таблице 4.4.

Результаты численных исследований показывают, что характеристики, полученные методом ММВП, менее устойчивые и имеют больший разброс значений. Однако, изучение вейвлет-спектра и линий локальных максимумов исследуемого фрактального временного ряда позволяет сделать дополнительные выводы о локальных особенностях структуры ряда и улучшить выборочные характеристики. Таким образом, при исследовании неизвестного временного ряда, метод МФДФА должен быть использован в первую очередь, а затем мультифрактальная структура может быть исследована более детально методом ММВП.

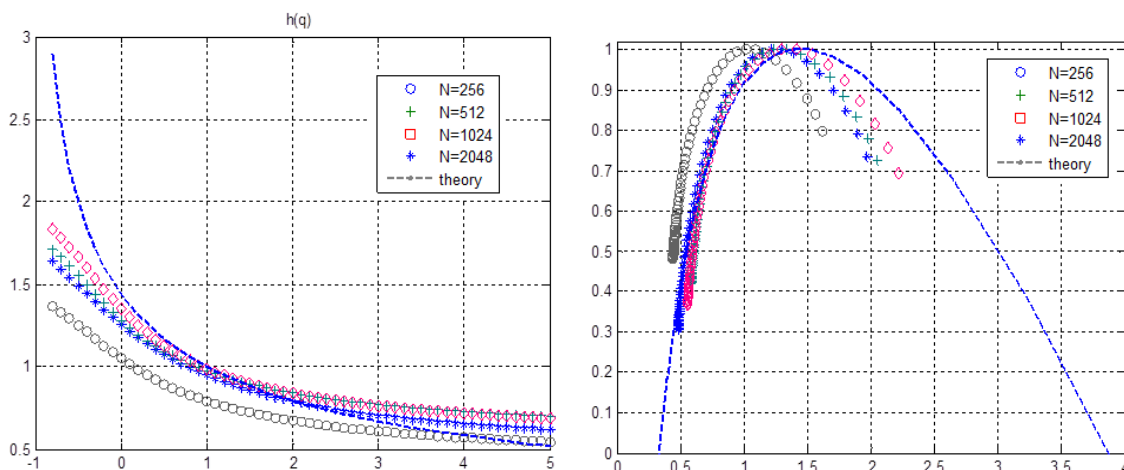


Рисунок 4.16 – Выборочные функции  $h(q)$  и  $f(\alpha)$  для реализаций детерминированного биномиального каскада, полученные методом ММВП

В таблице 4.4 приведены отклонения выборочных функций от теоретических значений, которые показывают определенные преимущества метода МФДФА, при анализе процессов с непрерывным мультифрактальным спектром.

На рис. 4.17 представлены усредненные выборочные функции  $h(q)$ , полученные методами МФДФА и ММВП для реализаций фрактального броуновского движения (а) и детерминированного мультифрактального каскада (б). Длина реализаций составляла 1024 отсчета.

**Таблица 4.4 – Отклонения для реализаций стохастического каскада**

Длина ряда	Метод	$\Delta H$	$\Delta h (q < 0)$	$\Delta h (q > 0)$
256	ММВП	0.12	0.8	0.11
	МФДФА	0.007	0.18	0.023
512	ММВП	0.045	0.5	0.09
	МФДФА	0.029	0.14	0.012
1024	ММВП	0.003	0.56	0.057
	МФДФА	0.015	0.16	0.017
2048	ММВП	0.04	0.4	0.081
	МФДФА	0.029	0.18	0.02

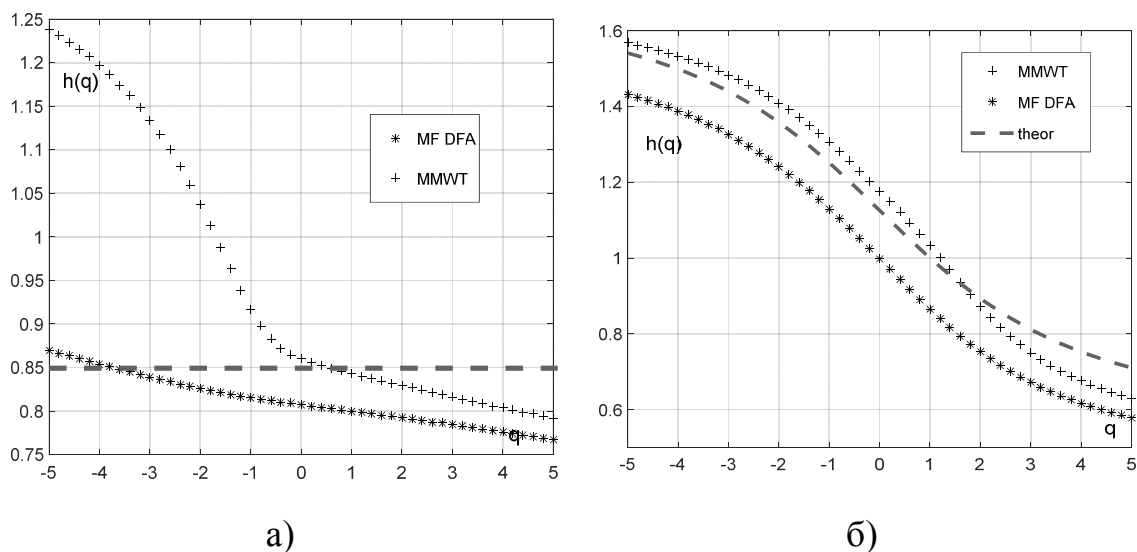


Рисунок 4.17– Выборочные функции  $h(q)$  для монофрактальных (а) и мультифрактальных реализаций (б)

#### 4.5 Определения свойств монофрактальности и мультифрактальности по выборочным фрактальным характеристикам

Приведенные выше результаты мультифрактального анализа модельных временных рядов демонстрируют необходимость разработки инструмента, позволяющего различать моно- и мультифрактальные реализации. В работе [Kirichenko 2014] предлагается метод, позволяющий принимать или отвергать гипотезу о наличии монофрактальных свойств ряда на основе исследования выборочных значений обобщенного показателя Херста, полученных методом МФДФА.

Для самоподобных процессов вопрос о законе распределения оценок  $H$  был рассмотрен в ряде работ, где было показано, численно или аналитически, что оценки являются нормальными случайными величинами. В работе были исследованы законы распределения оценок  $h(q)$  при разных значениях параметра  $q$ . Проведенный анализ

выборочных законов распределения  $h(q)$  показал, что при  $q > 0$  оценки  $h(q)$  имеют нормальное распределение, параметры которого зависят от значения  $q$ . Для  $q < 0$  выборочные значения обобщенного показателя Херста в общем случае не являются нормально распределенными.

На рис. 4.18 представлены значения функции  $h(q)$  ( $0 \leq q \leq 5$ ) и гистограммы значений оценок  $h(q)$ , полученные по реализациям длиной 1024 значений для  $q=1$  и  $q=5$ . Вверху приведены результаты для реализаций ФБД с параметром Херста  $H=0.8$ , внизу – для реализаций биномиального стохастического бета-каскада при значении  $\alpha=1$ .

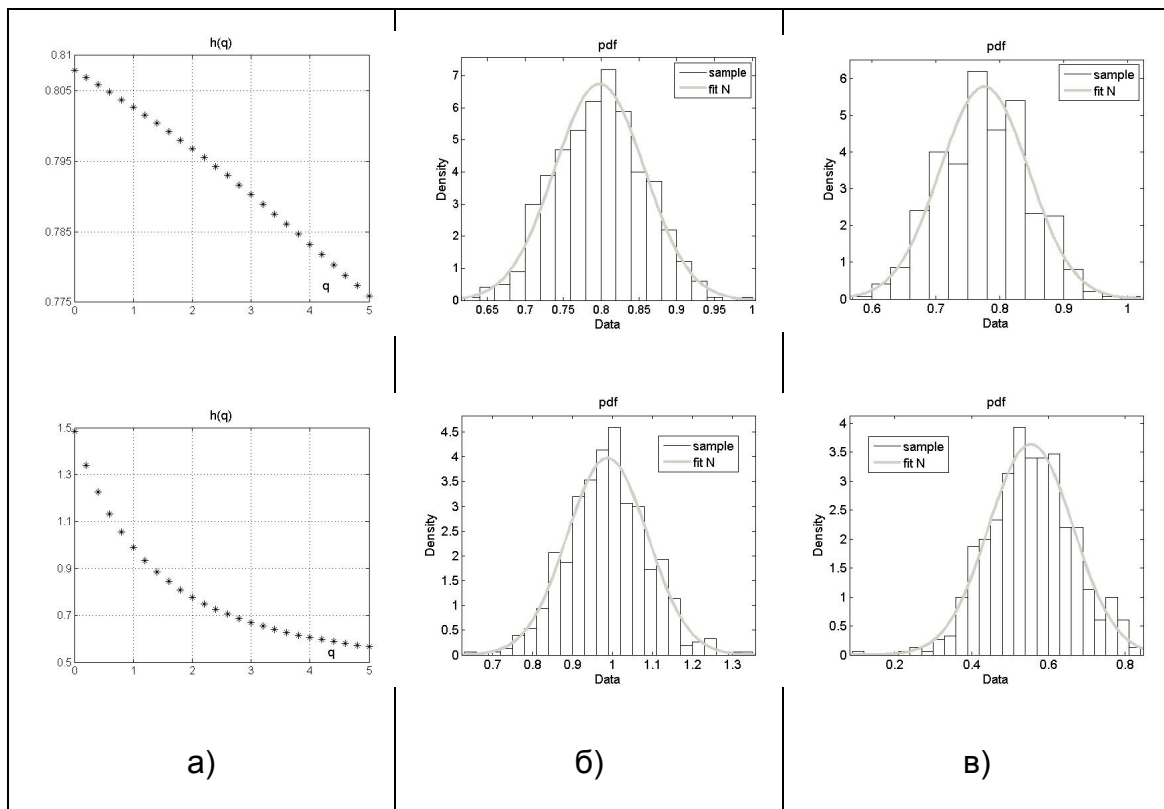


Рисунок 4.18 – Выборочные функции  $h(q)$  (а); выборочные плотности распределений  $h(q)$  при  $q=1$  (б) и  $q=5$  (в) для реализаций ФБД и реализаций стохастического каскада

Очевидно, что мультифрактальные процессы имеют гораздо больший перепад значений  $\Delta h = h(q1) - h(q2)$ . Случайная величина  $\Delta h$  при  $q > 0$  имеет нормальное распределение  $N(m_h, s_h)$ , параметры которого зависят от длины реализации и выбранных значений величины  $q$ . Предложенный в работе критерий рассматривает величину  $\Delta h = h(0.1) - h(5)$ . Путем численного моделирования монофрактальных процессов с различной степенью самоподобия были получены выборочные значения  $m_h$  и  $s_h$  для рядов длины  $N$ , представленные в таблице 4.5. Там же приведены аналогичные характеристики, рассчитанные по реализациям каскадных процессов с разной степенью неоднородности, задаваемой параметром бета-распределения  $a$ .

**Таблица 4.5 – Среднее значение и среднеквадратическое отклонение случайной величины  $\Delta h$**

	N=256		N=512		N=1024		N=2048	
	$m_h$	$s_h$	$m_h$	$s_h$	$m_h$	$s_h$	$m_h$	$s_h$
ФБД	0.075	0.052	0.05	0.038	0.035	0.026	0.03	0.022
Каскад								
a=1	0.87	0.23	0.86	0.18	0.85	0.16	0.82	0.12
a=5	0.32	0.13	0.29	0.095	0.28	0.08	0.27	0.07
a=10	0.23	0.1	0.2	0.07	0.18	0.06	0.17	0.05

Из таблицы видно, что даже при очень слабых мультифрактальных свойствах процесса можно различать моно- и мультифрактальные

реализации. Таким образом, значение случайной величины  $\Delta h$  можно использовать в качестве статистического критерия для принятия или отбрасывания гипотезы о наличии монофрактальных свойств временных рядов. В данном случае нулевой гипотезой является предположение о монофрактальности ряда с некоторым заданным уровнем значимости  $\alpha$ . Получив оценку функции  $\hat{h}(q)$  методом МФА, вычисляется наблюдаемая величина  $\Delta \hat{h} = \hat{h}(0.1) - \hat{h}(5)$ . Гипотеза принимается с уровнем значимости  $\alpha$ , если полученное значение попадает в область допустимых значений

$$m_h(N) - t_\alpha s_h(N) < \hat{h} < m_h(N) + t_\alpha s_h(N),$$

где  $N$  – длина реализации;

$m_h$  и  $s_h$  – соответствующие значения, рассчитанные для монофрактального процесса;

$\alpha$  – уровень значимости;

$t_\alpha$  – квантиль стандартного нормального распределения.

---

#### 4.6 Комплексный подход к оцениванию мультифрактальных свойств временных рядов малой длины

---

Подводя итоги исследований, представленных в 3-ем и 4-ом разделах, можно предложить следующую схему проведения мультифрактального анализа некоторого случайного процесса, представленного временным рядом длины  $N$ . Поскольку для применения аппарата вейвлет-преобразований необходимо соответствующее программное обеспечение и опыт работы, можно ограничиться методом МФА.

---

1. Предварительное исследование структуры временного ряда является необходимым этапом мультифрактального анализа, полное его описание приведено в разделе 3. В этот этап входит

– определение интервалов различных скейлингов, проводимое с помощью построения зависимости  $H(\tau) = f[\log \frac{R}{S}(\tau)]$  или флуктуационной

функции  $F_{DFA}(\tau)$ ;

– выявление и удаление краткосрочной авторегрессионной зависимости;

– проверка гипотезы о наличии самоподобных свойств в широком смысле.

2. Оба рассмотренных метода предназначены для работы с нестационарными рядами. Но прежде чем приступить к оцениванию мультифрактальных свойств, необходимо исследовать его структуру с помощью построения корреляционной функции (спектральной плотности) и спектра вейвлет-энергии, которые позволяют выявить трендовые и циклические составляющие ряда.

3. При оценивании обобщенного показателя Херста методом МФДФА, необходимо сначала провести прикидочное оценивание показателя Херста  $h(2)$ , используя локальные полиномы увеличивающейся степени и определить наименьшую степень полинома, начиная с которой оценка показателя Херста перестает изменяться. После этого проводить оценивание функции  $h(q)$ , удаляя локальный полиномиальный тренд найденной степени. Пошаговый алгоритм оценивания мультифрактальных характеристик временного ряда методом МФДФА приведен в 4.2.

4. При оценивании скейлинговой экспоненты методом ММВП, необходимо сначала выбрать подходящий диапазон масштаба  $a_1 \leq a \leq a_2$ , на которых



определяются линии локальных экстремумов функции  $W(a,b)$ . Правильный выбор диапазона масштаба позволяет не учитывать влияние трендовых компонент ряда. Затем надо провести прикидочное оценивание частичной функции  $Z(q,a)$ , чтобы убедиться в наличии интервалов линейной зависимости  $\log Z(q,a)$  от  $\log a$ . Пошаговый алгоритм оценивания мультифрактальных характеристик временного ряда методом ММВП приведен в 4.3.

5. При слабовыраженных мультифрактальных свойствах необходимо проверить гипотезу о наличии монофрактальных свойств временных рядов. Статистический критерий рассмотрен в подразделе 4.5.

6. Получить отдельно интервальную оценку показателя Херста  $h(2)$ .

7. Если оценки мультифрактальных характеристик были получены разными методами, то для увеличения точности необходимо провести их сравнительный анализ с учетом априорной информации о характеристиках исследуемого временного ряда и результатов численных исследований подраздела 4.4.

---

## Выводы

---

1. Рассмотрены математические модели разных типов фрактальных стохастических процессов: монофрактальные, бифрактальные и мультифрактальные и их теоретические фрактальные характеристики. Показано, что данные модели можно использовать для тестирования

методов оценивания мультифрактальных характеристик по временным рядам малой длины.

2. Исследованы особенности численной реализации методов мультифрактального анализа, построенных на основе: детрендированного флуктуационного анализа и максимумов модулей непрерывного вейвлет-преобразования.

3. Проведено тестирование каждого метода на реализациях фрактальных процессов разных типов. Численно показано, что мультифрактальные характеристики (обобщенный показатель Херста, скейлинговая экспонента, функция мультифрактального спектра), полученные по выборкам конечной длины, имеют смещение, которое уменьшается с увеличением длины выборки. Показано, что метод мультифрактального детрендированного флуктуационного анализа имеет значительные преимущества в точности при оценивании характеристик процессов с дискретным мультифрактальным спектром.

4. Разработан метод, позволяющий принимать или отвергать гипотезу о наличии монофрактальных свойств ряда на основе исследования выборочных значений обобщенного показателя Херста, полученных методом мультифрактального детрендированного флуктуационного анализа.

5. Разработан комплексный подход к оцениванию мультифрактальных характеристик временных рядов и предложены практические рекомендации по реализации данного подхода.

---

## Литература

---

- [Kantelhardt, 2002] Kantelhardt, J.W., Zschiegner, S.A., Bunde, A., Havlin, S., Koscielny-Bunde, E., Stanley, H.E. Multifractal detrended fluctuation analysis of non-stationary time series. *Physica A.*, № 316, 2002. pp. 87–114.
- [Kantelhardt, 2008] Kantelhardt, J. W. Fractal and Multifractal Time Series. [Электронный ресурс]: 2008.– Режим доступа: <http://arxiv.org/abs/0804.0747>.
- [Kirichenko, 2014] Kirichenko, L. The method of distinction monofractal and multifractal process from time series. *Системні технології*, №6 (95), 2014. С. 121-127.
- [Muzy, 1991] Muzy, J.F., Bacry, E., Arneodo, A. Wavelets and Multifractal Formalism for Singular Signals: Application to Turbulence Data. *Physical review letters.*, Vol. 67, 1991. pp. 3515–3518.
- [Muzy, 1993] Muzy, J.F., Bacry, E., Arneodo, A. Multifractal formalism for fractal signals: the structure-function approach versus the wavelet-transform modulus-maxima method. *Phys. Rev. E.* , Vol. 47, 1993. pp. 3515–3518.
- [Nakao, 2000] Nakao H Multi-scaling properties of truncated Levy flights. *Phys. Lett. A.*, Vol. 266, 2000. pp. 282–289.
- [Oswiecimka, 2006] Oswiecimka, P., Kwapin, J., Drozd, S. Wavelet versus detrended fluctuation analysis of multifractal structures. *Physical Review E: Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, Vol. 74, 2006. pp. 161-203.
- [Riedi, 2002] Riedi, R.H. Multifractal processes, in Doukhan P., Oppenheim G., Taqqu M.S. (Eds.), *Long Range Dependence: Theory and Applications*, Birkhuser, 2002. pp. 625–715.
- [Кириченко, 2011, 1] Кириченко, Л. О. Исследование выборочных характеристик, полученных методом мультифрактального флуктуационного анализа. *Вісник НТУУ «КПІ». Інформатика, управління та обчислювальна техніка: зб. наук. пр.*, № 54, 2011. С.101–111.

[Кириченко, 2011, 2] Кириченко, Л. О. Сравнительный мультифрактальный анализ временных рядов методами детрендированного флуктуационного анализа и максимумов модулей вейвлет-преобразования. Автоматизированные системы управления и приборы автоматики, Вып. 157, 2011. С.66–77.

[Павлов, 2007] Павлов, А. Н., Анищенко, В. С. Мультифрактальный анализ сигналов на основе вейвлет-преобразования. Известия Саратовского университета. Сер. Физика, Т. 7, Вып. 1, 2007. С.1–18.

---

### Информация об авторах

---



**Людмила Кириченко** – д.т.н., профессор Харьковского национального университета радиозлектроники; пр. Науки 14, 61166, Харьков, Украина; e-mail: [lyudmyla.kirichenko@nure.ua](mailto:lyudmyla.kirichenko@nure.ua)

Основные области научных исследований: самоподобные и мультифрактальные временные ряды, фрактальный анализ, вейвлет-анализ, детерминированные хаотические системы.



**Тамара Радивилова** – к.т.н., доцент Харьковского национального университета радиозлектроники; пр. Науки 14, 61166, Харьков, Украина; e-mail: [tamara.radivilova@gmail.com](mailto:tamara.radivilova@gmail.com)

Основные области научных исследований: самоподобные и мультифрактальные временные ряды, телекоммуникационные системы, управление трафиком, информационная безопасность.