

## ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРА САМОПОДОБИЯ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Людмила Кириченко, Тамара Радивилова

В общем случае, временной ряд можно рассматривать в виде суммы разнотипных составляющих: системной составляющей функции тренда – средних значений по большим интервалам усреднения; циклических компонент с определенным периодом повторения; локальных особенностей; аномалий разного порядка; флуктуаций более высокого порядка (шумов) вокруг всех перечисленных составляющих. Наличие трендовых и циклических компонент требует применения соответствующих подходов для определения самоподобия исследуемого процесса. Эти подходы рассмотрены в статье.

---

### 3.1 Предварительное исследование структуры самоподобного временного ряда на основе R/S-анализа

---

Согласно общепринятым методам расчета показателя Херста по исследуемому временному ряду получают точечную оценку этого параметра – число, которое характеризует степень долгосрочной зависимости: чем ближе параметр  $H$  к 1, тем медленнее при увеличении временной задержки  $k$  убывают корреляции между временными отсчетами. Однако возможно показатель Херста рассматривать как функцию числа временных отсчетов  $H(n)$ . Такой подход возможен при применении метода нормированного размаха, когда интервалы времени  $\tau$  изменяются малыми приращениями.

### 3.1.1 Проверка гипотезы о наличии самоподобия

Важнейшим положением, с которого необходимо начинать исследование фрактальной структуры случайного процесса, является проверка гипотезы о наличии самоподобия (долгосрочной зависимости). В качестве нулевой гипотезы обычно постулируется, что приращения случайного процесса имеют независимый характер. Зная результаты для случайного процесса с независимыми приращениями, мы можем сравнить исследуемый процесс с нулевой гипотезой и измерить значимость степени самоподобия.

Г. Херст основывал нулевую гипотезу на биномиальном распределении и подбрасывании монет [Hurst, 1951; Hurst, 1955]. Его результат для случайных блужданий:

$$M \left[ \frac{R}{S}(n) \right] = (n \cdot \pi/2)^{0.5}, \quad (3.1)$$

где  $n$  – количество наблюдений.

На основе (3.1) и дальнейших модификаций данного результата в работе [Петерс, 2004] было предложено следующее уравнение для математического ожидания нормированного размаха:

$$M \left[ \frac{R}{S}(n) \right] = ((n - 0.5)/n)(n \cdot \pi/2)^{-0.5} \sum_{r=1}^{n-1} \sqrt{(n-1)/r}. \quad (3.2)$$

Исследования, проведенные в работах [Feller, 1951; Mandelbrot, 1969; Mandelbrot, 1979; Петерс, 2004], показали, что для случая  $H = 0,5$  оценка показателя Херста представляет собой случайную величину с нормальным распределением. Математическое ожидание этой величины определяется формулой (3.2). Дисперсия в общем случае зависит от вида распределения данных, однако численные исследования [Taqqi, 1995; Taqqi, 1996; Федер, 1991; Петерс, 2004] позволяют грубо считать среднее

квадратичное отклонение оценки  $s$  для случая  $H = 0,5$  равным  $s = \sqrt{\frac{1}{N}}$ , где  $N$  – число значений ряда.

Логарифм функции (3.2) показывает теоретические значения  $\log(R/S)$  для случая независимых случайных данных (при  $H = 0,5$ ). При наличии долгосрочной зависимости (персистентности процесса) значения  $\log(R/S)$  будут находиться выше, а в случае антиперсистентности – ниже линии, описанной уравнением (3.2).

На рис 3.1 представлены типичные зависимости  $\log(R/S)$  от логарифма длины ряда для модельных временных рядов с различными типами памяти для длиной  $n = 2048$ . Пунктирная линия показывает теоретические значения  $\log(R/S)$  для случая независимых случайных данных. Показаны зависимости  $\log(R/S)$  для классического броуновского движения (линия 2), фрактального броуновского движения с параметром Херста  $H = 0,8$  (линия 1) и ФБД с параметром Херста  $H = 0,2$  (линия 3),.

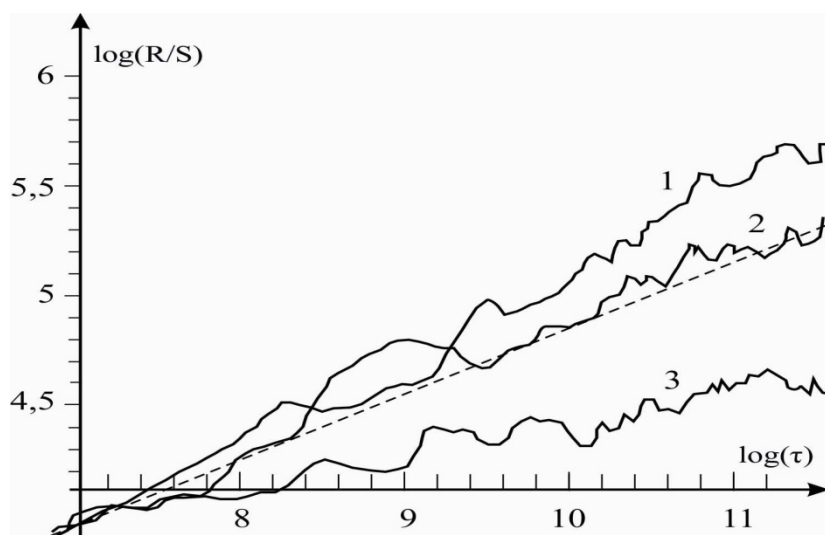


Рисунок 3.1 – Зависимости  $\log(R/S)$  для процессов с разными типами памяти

Одним из методов проверки значимости показателя Херста является тест на перемешивание данных [Петер, 2000; Петерс, 2004]. В этом случае порядок наблюдений становится полностью отличным от исходных. Вычисляется показатель Херста для перемешанных данных. Если ряд действительно являлся независимым, то значение  $H$  не изменится, поскольку корреляции между наблюдениями не существует. Если же имел место эффект долговременной памяти, то порядок между наблюдениями весьма важен. Перемешивая данные, мы разрушаем структуру системы. Оценка  $H$  при этом окажется значительно ниже и будет близка к 0,5. На рисунке 3.2 показаны зависимости  $\log(R/S)$  для исходного и перемешанного временного ряда. В первом случае оценка показателя Херста равна 0,57, во втором – 0,48. Отсюда можно сделать вывод о наличии долгосрочной зависимости для исследуемого ряда.

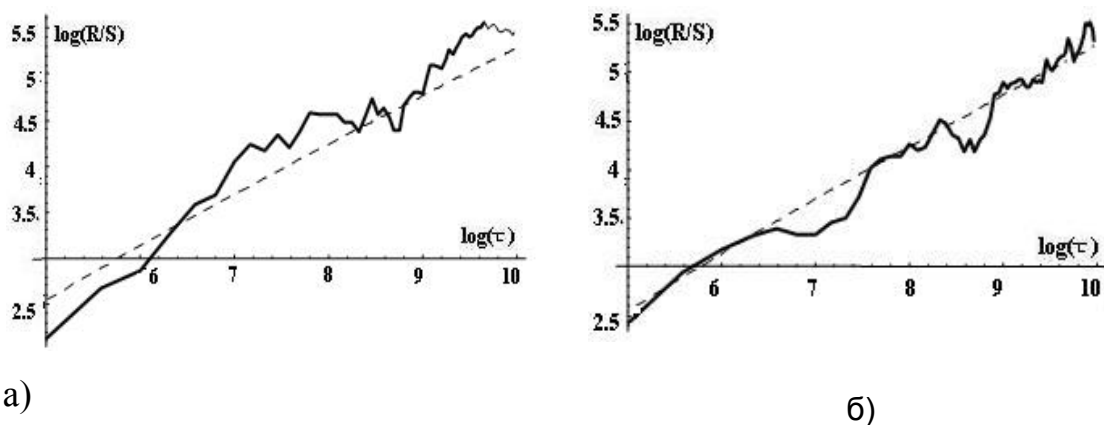


Рисунок 3.2 – Зависимости  $\log(R/S)$  в тесте на перемешивание:

а) исходный ряд; б) перемешанный ряд

### 3.1.2 Определение интервалов долгосрочной зависимости и удаление краткосрочной зависимости

Анализ поведения показателя Херста относительно функции (3.2) позволяет определить значение временного интервала, начиная с которого ряд обладает долгосрочной памятью [Ширяев, 1998; Петерс, 2004]. На рис. 3.3 показаны два интервала зависимости  $\log(R/S)$ . На временных интервалах меньших момента  $\tau_L$  значения ряда являются независимыми, а на больших интервалах ряд обладает долгосрочной зависимостью.

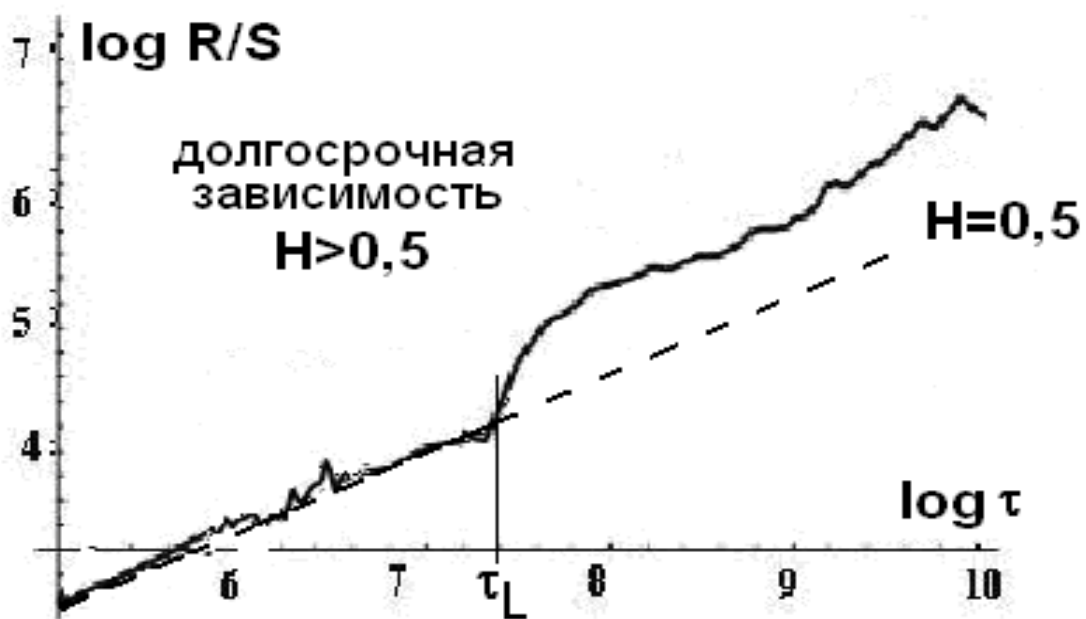


Рисунок 3.3 – Зависимость  $\log(R/S)$  для двух интервалов памяти

$R/S$ -анализ позволяет обнаружить и устранить краткосрочную зависимость, характерную для авторегрессионных процессов, в простейшем случае имеющих зависимость:

$$X(t+1) = \phi X(t) + \varepsilon(t),$$

где  $\phi$  – параметр авторегрессии;  $t$  – дискретное время;  $\varepsilon(t)$  – независимые от  $X(t)$  значения случайной величины с нормальным распределением  $N(0, \sigma)$ .

В подобных случаях линейная зависимость смещает значения показателя Херста и демонстрирует ложную долговременную память, что показано на рисунке 3.4 слева (линия 1).

Поэтому, при выяснении фрактальной структуры временного ряда необходимо сначала выяснить наличие краткосрочной зависимости. Для этого надо значения временного ряда  $X(t)$  регрессировать как зависимую переменную против  $X(t-1)$  и найти линейную зависимость между ними:

$$X(t) = a + b \cdot X(t-1). \quad (3.3)$$

Значимость коэффициента  $b$  свидетельствует о наличии краткосрочной зависимости. Для ее устранения определяется остаток:

$$S(t) = X(t) - (a + b \cdot X(t-1)). \quad (3.4)$$

После этого проводится  $R/S$ -анализ остаточного ряда  $S(t)$ . Если исходный ряд  $X(t)$  имел долговременную зависимость, то она сохраняется, в то время, как краткосрочная зависимость устраняется. На рисунке 3.4

показано устранение краткосрочной зависимости для процесса авторегрессии (слева) и ФБД с параметром Херста  $H = 0,8$  (справа).

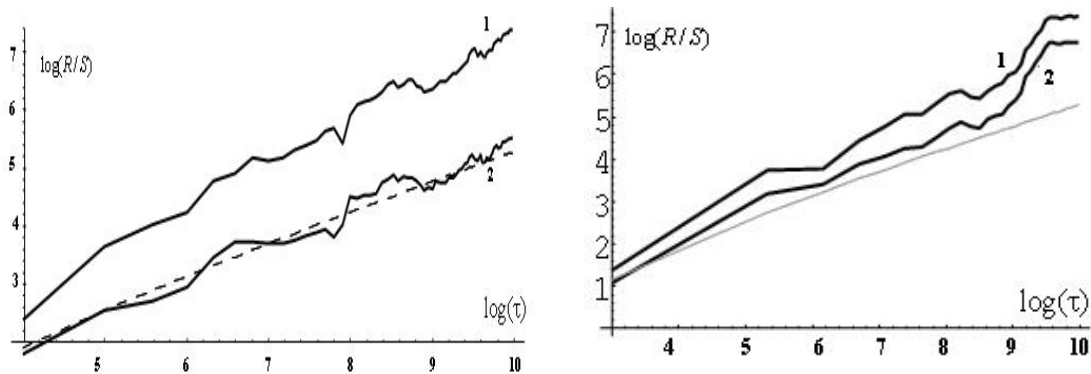


Рисунок 3.4 – Удаление краткосрочной зависимости для процесса авторегрессии (слева) и ФБД с параметром Херста  $H = 0.8$  (справа)

Оценка показателя Херста в первом случае была равна 0,73. После удаления краткосрочной зависимости для процесса авторегрессии оценка показателя Херста снизилась до значения 0,52 (линия 2). Оценка показателя Херста для реализации ФБД изменилась незначительно: с 0,83 (линия 1) до 0,81 (линия 2).

### 3.2 Применение метода детрендированного флуктуационного анализа для временных рядов с трендовыми компонентами

Метод нормированного размаха и другие, не удаляющие тренда методы, хорошо работают в случае стационарных временных рядов. Но если во временном ряде присутствует тренд, эти методы могут дать неверные результаты. Очень часто причины возникновения основных трендов во

временных рядах не известны. ДФА является методом определения скейлингового поведения зашумленных данных при наличии трендов, не зная их происхождение и формы. Метод ДФА традиционно используется для анализа фрактальной структуры и оценивания степени самоподобия временных рядов с трендами (например, реализации энцефалограмм) или кумулятивных рядов с нестационарными приращениями (например, финансовые ряды).

Самым важным этапом выполнения ДФА является устранение локального полиномиального тренда  $Y_m(t)$  в каждом сегменте кумулятивного ряда  $X^{cum}$  длиной  $\tau$  (см. рисунок 3.5), содержащего  $N$  значений:

$$F_{DFA}^2(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left( X^{cum}(t) - Y_m(t) \right)^2. \quad (3.5)$$

Флуктуационная функция зависит от степени полинома локального тренда  $Y_m(t)$ . Каждый раз, изменяя порядок полиномиального тренда  $m$  мы получаем другое значение флуктуационной функции  $F_{DFA}^{(m)}(\tau)$ . Надо отметить, что удаление локального тренда  $Y_m(t)$  для кумулятивного ряда  $X^{cum}$  соответствует удалению тренда порядка  $m-1$  для начального исследуемого ряда.

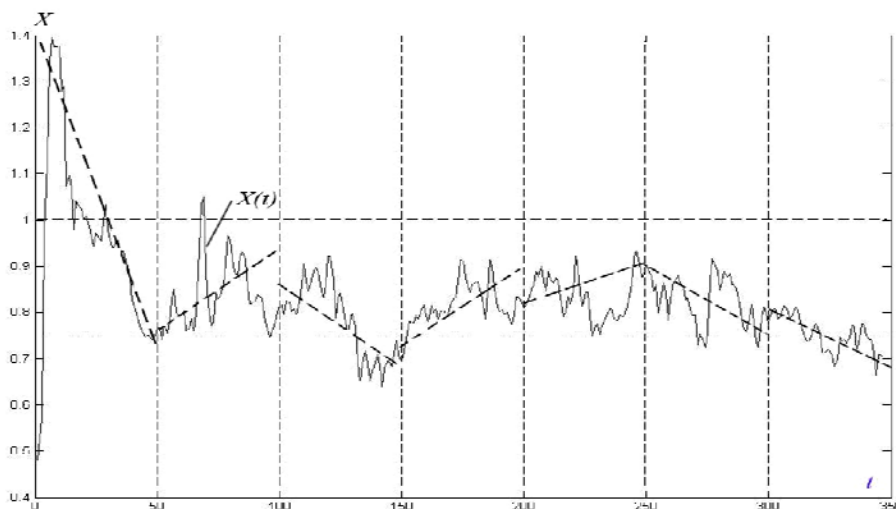


Рисунок 3.5 – Этап построения флуктуационной функции



В данном подразделе представлены результаты исследования влияния выбора степени полинома  $m$  локального тренда  $Y_m$  на оценку показателя Херста для временных рядов небольшой длины. Для таких рядов имеет существенное значение, что для минимальной длины сегмента  $\tau$  должно выполняться условие [Kantelhardt 2001]:  $\tau \geq m + 2$ , в тоже время максимальная длина сегмента не должна превышать значения  $N / 4$ , где  $N$  - длина исследуемого временного ряда.

Для проведения численных исследований в работах использовались модельные временные реализации, представленные суммой фрактального броуновского движения с заданным показателем Херста, и различными трендовыми составляющими: полиномиальными, трансцендентными, синусоидальными. Модельный сигнал можно представить суммой:

$$Y(t) = aT(t) + \varepsilon_H(t), \quad (3.6)$$

где  $a$  – коэффициент, регулирующий отношение тренда к шуму;  $T(t)$  – тренд;  $\varepsilon_H(t)$  – фрактальный гауссовский шум с заданным показателем Херста  $H$ .

Проведенные численные исследования для фрактальных рядов с полиномиальными трендовыми составляющими порядка  $p$  показали, что адекватное оценивание параметра Херста достигается при использовании локального полиномиального тренда порядка  $m > p$ . На рисунке 3.6 слева представлены флуктуационные функции  $F_{DFA}^{(m)}(\tau)$  порядка  $m = 1, 2, 3, 4$  для фрактальных рядов с линейным трендом (теоретическое значение показателя Херста  $H = 0.7$ ).

Исследования [Kirichenko 2011], проведенные для временных реализаций с рациональными полиномами и трансцендентными функциями показали корректное оценивание при использовании локального полиномиального тренда порядка  $m \geq 2$ . В правой части рис. 3.6 показано изменение

соответствующих флуктуационных функций  $F_{DFA}^{(m)}(\tau)$  при изменении порядка локального полиномиального тренда  $m=2,3,4,5$  для модельного ряда, который в соответствии с (3.6) имеет выражение  $Y(t) = 0.5 * t^{\frac{1}{2}} + fgn(t)$ .

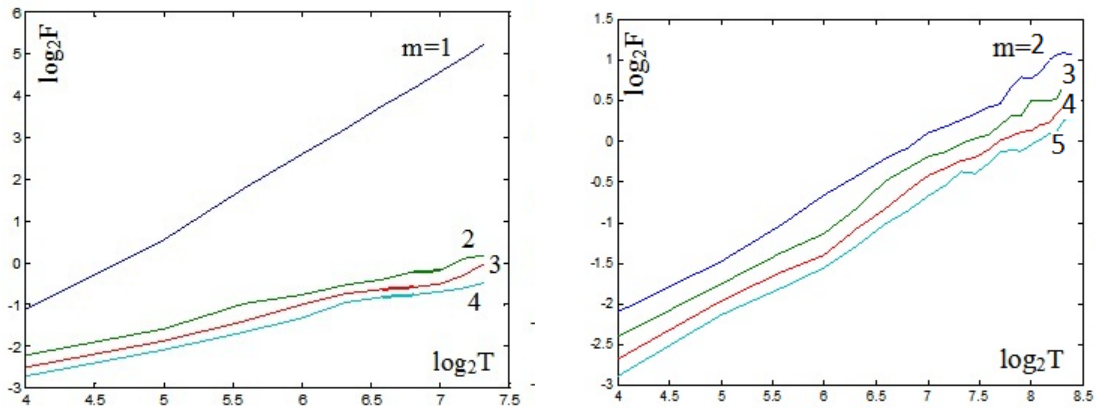


Рисунок 3.6 – Флуктуационные функции данных с линейным (слева) трендом и трендом вида квадратного корня (справа)

Значения оценок показателя Херста, которые получены с помощью флуктуационных функций, для некоторых полиномиальных и рациональных функций трендов, приведены в таблице 3.1.

Очевидно, что корректная оценка параметра  $H$  для фрактальных рядов с полиномиальным трендом порядка  $p$  достигается при вычитании из кумулятивного ряда локального тренда порядка  $m > p$  и не изменяется (в пределах погрешностей), при увеличении порядка локального тренда  $m$ . Корректная оценка параметра  $H$  для трендов рациональных и трансцендентных функций достигается при вычитании локального тренда порядка  $m \geq 2$  в зависимости от вида тренда.

Наибольшую сложность в оценивании степени самоподобия представляют ряды с периодическими и циклическими трендовыми компонентами. На

рисунке 3.7 представлены флуктуационные функции для трендов с синусоидальными составляющими разных периодов.

**Таблица 3.1 – Оценка  $H$  для полиномиальных и рациональных трендов разного порядка (длина ряда 1024)**

Тренд	Порядок локального тренда	Оценка $H$	Тренд	Порядок локального тренда	Оценка $H$
$t$	1	1.935	$\sqrt{t}$	2	0.784
	2	0.713		3	0.703
	3	0.712		4	0.718
	4	0.691		5	0.689
$t^3$	2	2.15	$\sqrt[5]{t}$	2	0.693
	3	0.793		3	0.709
	4	0.718		4	0.718
	5	0.723		5	0.688

Численный анализ показал, что чем больше периодов содержит реализация, тем большую степень локального полинома необходимо использовать (см. табл. 3.2).

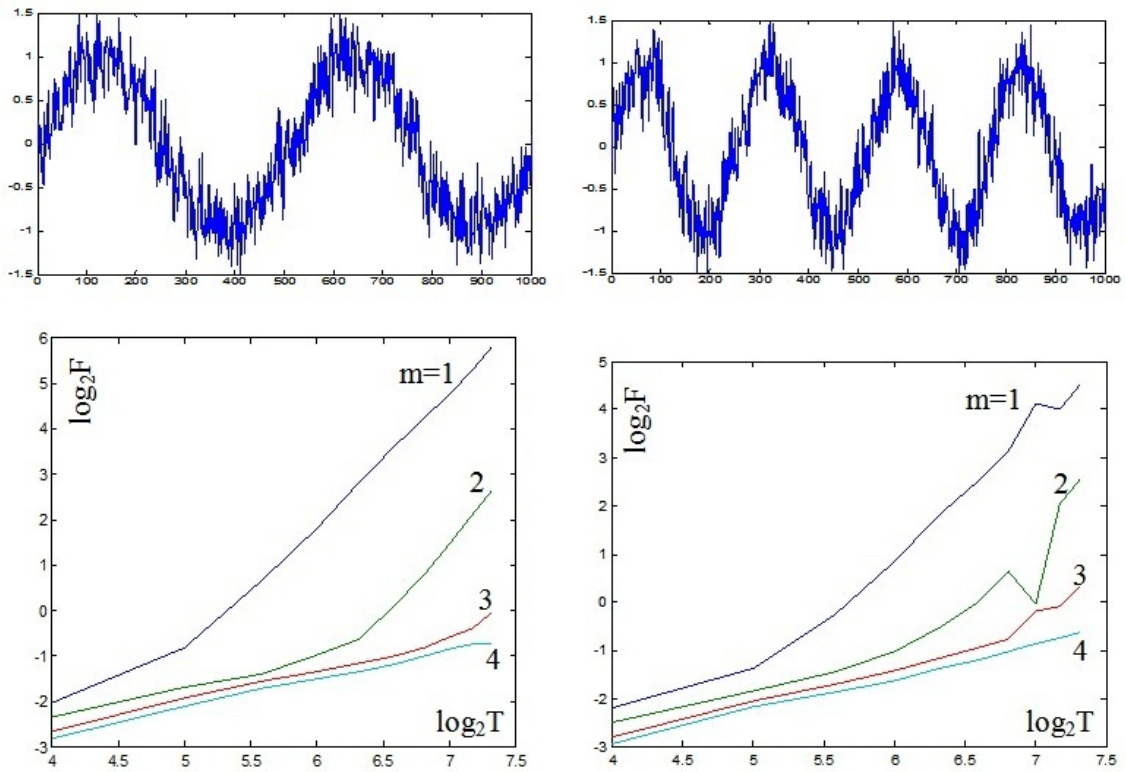


Рисунок 3.7 – Флуктуационные функции для трендов с синусоидальными составляющими

Таблица 3.2 – Оценка  $H$  для рядов с разными функциями тренда (длина ряда 1024)

Тренд	Порядок локального тренда	Оценка $H$	Тренд	Порядок локального тренда	Оценка $H$
1 период $\sin 2\pi t$	2	2.44	3 периода $\sin 2\pi t$	2	2.67
	3	0.733		3	1.23
	4	0.697		4	0.731
	5	0.701		5	0.7101

Обобщая результаты численного исследования, можно сделать вывод, что при оценивании показателя Херста методом ДФА, необходимо сначала провести прикидочное оценивание, используя локальные полиномы увеличивающейся степени и определить наименьшую степень полинома, начиная с которой оценка показателя Херста перестает изменяться. После этого для полного проведения исследования самоподобия временного ряда необходимо удалять локальный полиномиальный тренд найденной степени.

---

### **3.3 Вейвлет-оценивание параметра Херста для рядов с существенными трендовыми и циклическими компонентами**

---

Вейвлет-разложение позволяет эффективно выделять тренды, содержащие сложные циклические составляющие. Для выделения трендовой составляющей анализируемый сигнал декомпозируется с помощью дискретного вейвлет-преобразования (см. раздел 2.4) на заданное число уровней.

#### **3.3.1 Определение диапазона корректного оценивания показателя Херста при наличии трендовых и периодических компонент**

Спектр вейвлет-энергии характеризует энергию сигнала на каждом из уровней разложения. Каждый уровень разложения соответствует определенному диапазону частот. Таким образом, коэффициенты этого уровня показывают, насколько мощно представлен этот диапазон частот в сигнале. С помощью вейвлет-разложения можно выделить трендовые и циклические составляющие в исследуемом временном ряде.

Однако удаление тренда из временного ряда в большинстве случаев не дает корректную оценку показателя Херста, поскольку при этом нарушаются корреляционные связи. Во многих случаях нельзя упрощенно разделять случайный процесс или исследуемый временной ряд на регулярную медленно меняющуюся трендовую составляющую и остаток,

который в свою очередь находится под влиянием множества составляющих ряда.

В качестве одного из основных критериев для выбора конкретного вейвлета можно использовать число нулевых моментов вейвлет-функции:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^k \psi(t) dt = 0, \quad k = \overline{0, m-1}. \quad (3.7)$$

Число нулевых моментов  $m$  характеризует способность вейвлета выявлять локальные особенности анализируемого сигнала, поскольку следует, что вейвлет  $\psi$  ортогонален любому многочлену степени  $m-1$ . Обладающие большим числом нулевых моментов вейвлеты позволяют, игнорируя наиболее регулярные полиномиальные составляющие сигнала, анализировать мелкомасштабные флуктуации и особенности высокого порядка. Считается, что если вейвлет имеет нулевые моменты  $m$ -ого порядка, то влияние трендовых полиномиальных составляющих до  $m$ -ого порядка включительно не проявляется на анализируемом сигнале [Малла, 2005].

В данном подразделе представлены результаты исследований [Дейнеко, 2010; Kirichenko, 2011]. В таблице 3.3 приведены значения оценок показателя Херста, полученные для модельных рядов (3.6) с полиномиальным трендом порядка  $m$ . Оценки получены по самоподобным реализациям с  $H = 0,7$  длиной 1000 значений с использованием вейвлетов семейства Добеши.

**Таблица 3.3 – Оценка показателя  $H$ , полученная с помощью вейвлетов с разным числом нулевых моментов**

Полиномиальный тренд	$H$	оценка $H$				
		db1	db2	db3	db4	db5
		$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$
$m = 1$	0.7	0.7350	0.7105	0.7127	0.6899	0.7024
$m = 2$	0.7	0.7908	0.7353	0.7013	0.7031	0.7036
$m = 3$	0.7	1.2272	0.9572	0.7344	0.7888	0.7805

Однако корректное оценивание показателя  $H$  с применением вейвлетов, имеющих нулевые моменты высокого порядка, возможно только при небольшом значении отношения полинома к фрактальной составляющей. Величиной, характеризующей соотношение тренда и фрактального шума, является величина:

$$Ratio = \frac{S_{trend}}{S_{noise}}, \quad (3.8)$$

где  $S_{trend}$  – среднеквадратическое отклонение тренда;  $S_{noise}$  – среднеквадратическое отклонение фрактального процесса.

Результаты исследований модельных сигналов, содержащих полиномиальные тренды разных порядков, а также циклическую составляющую, с использованием материнских вейвлетов с разным числом нулевых моментов демонстрирует таблица 3.4.

**Таблица 3.4 – Оценивание с помощью разных вейвлетов для сигналов с трендом**

Тренд	<i>Ratio</i>	оценка <i>H</i>				
		db1	db2	db4	db8	db10
$0.01t^2$	0.7107	0.7030	0.7305	0.7127	0.6899	0.7024
$0.02t^2$	1.4389	0.7908	0.7353	0.7013	0.7031	0.7036
$0.5t^2$	36.4223	1.2272	0.9572	0.7344	0.7888	0.7805
$0.005t^3$	2.7621	0.8010	0.7604	0.7194	0.7058	0.7045
$0.01t^3$	5.3329	0.8791	0.8042	0.7128	0.7066	0.7137
$0.02t^3$	10.8966	0.9623	0.8748	0.7398	0.7193	0.7313
$1.5 \sin(0.5\pi t)$	3.8520	0.9768	0.9720	0.7493	0.7635	0.7692
$5.5 \sin(0.5\pi t)$	14.2869	1.1938	1.0142	0.7841	0.7851	0.7978

Из таблицы видно, что при небольшом отношении тренда к шуму, оценки показателя Херста, полученные материнскими вейвлетами Добеши db4, db8 и db10, имеющих соответственно 4, 8 и 10 нулевых моментов, дают корректные значения показателя *H*, в то время как вейвлет Хаара (haar) и Добеши 2 порядка (db2) показывают завышенный результат, показатель Херста довольно быстро растет при возрастании значения *Ratio* и становится выше единицы.

Оценка показателя Херста *H*, заданного при моделировании фрактального процесса, вычисляется корректно либо нет, в зависимости от коэффициента *Ratio*, определяющего уровень шума. При возрастании



значения  $Ratio$ , оценка  $H$  становится завышенной при любом материнском вейвлете и достаточно скоро становится больше единицы. Однако существует некоторый диапазон значений отношения тренда к шуму, при котором параметр Херста оценивается корректно.

Определить момент появления тренда, соответствующий значению  $Ratio^*$ , можно с помощью простых и известных статистических критериев случайности [Кендэл, 1981]. Критерии позволяют проверить гипотезу, являются ли отдельные результаты независимыми наблюдениями или временной ряд имеет тренд, а также определить момент его возникновения. Значение  $Ratio^*$  определялось как максимальное значение  $Ratio^*$ , для которого принимается гипотеза об отсутствии тренда для обоих критериев одновременно

На рисунке 3.8 представлены значения оценок параметра  $H$ , полученные с помощью вейвлета db4, в зависимости от показателя  $Ratio$ , полученные для фрактальных временных рядов с линейным трендом. На представленной зависимости выделен диапазон, где оценка является корректной.

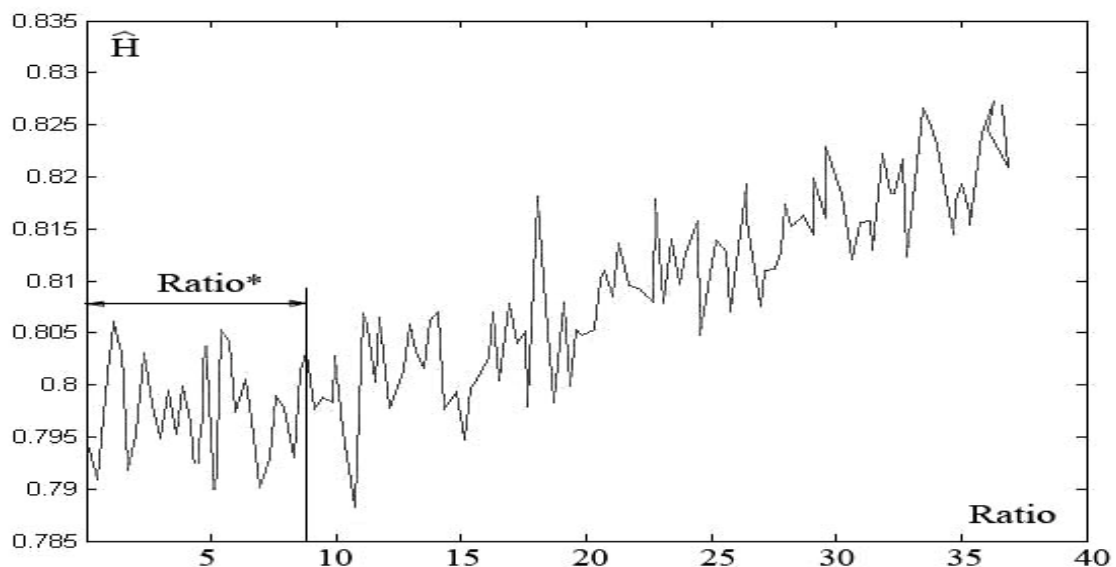


Рисунок 3.8 – Зависимость оценок показателя Херста от коэффициента  $Ratio$

В таблице 3.5 представлены результаты эксперимента для модельных фрактальных временных рядов с различными трендовыми компонентами и соответствующее значение коэффициента  $Ratio^*$ .

**Таблица 3.5 – Значения коэффициента  $Ratio^*$  для модельных временных рядов с трендовыми компонентами**

Тренд	Значение $Ratio^*$
$T(t) = t$	8.27
$T(t) = t^2$	7.25
$T(t) = t^3$	4.74
$T(t) = \sqrt{t}$	1.82
$T(t) = t^{3/4}$	0.45
$T(t) = \log(t)$	0.30
$T(t) = \sin(2\pi t)$ , 1 период	0.18
$T(t) = \sin(2\pi t)$ , 2 периода	0.08

Очевидно, что для полиномиального тренда невысокого порядка оценка показателя  $H$  является корректной даже при большом соотношении тренда и фрактального шума. При гиперболическом и логарифмическом тренде корректное оценивание возможно только при небольшом тренде.

### 3.3.2 Вейвлет-оценивание показателя Херста, на основе предварительного анализа спектра вейвлет-энергии

Для оценивания показателя  $H$  могут быть выбраны вейвлет-функции семейства Добеши (db2-db20), которые обладают необходимым числом нулевых моментов, (соответственно 2-20). При небольших значениях отношения тренда к ФГШ ( $Ratio \leq 2$ ) метод вейвлет-оценивания позволяет получить адекватные оценки показателя Херста при использовании вейвлет-функций с большим числом нулевых моментов. Однако, с увеличением значения  $Ratio$  или числа периодов в циклической компоненте, требуются вейвлет-функции с все большим числом нулевых моментов, что сложно реализуемо на практике. Кроме того, использование вейвлет-функций, обладающих большим числом нулевых моментов, приводит к менее точному оцениванию показателя  $H$ .

В том случае, когда сигнал содержит трендовую составляющую, спектр вейвлет-коэффициентов демонстрирует большой всплеск коэффициентов на низких частотах. В этом случае преобладающие в сигнале низкочастотные составляющие подавляют все остальные. Однако, при оценивании параметра Херста  $H$  можно не учитывать коэффициенты на высоких уровнях и оценивать угол наклона только по значениям вейвлет-энергии коэффициенты на более низких уровнях разложения.

На рис. 3.9 представлены аддитивные сигналы (3.6) различного типа (заданный показатель Херста  $H = 0,8$ , длина временного ряда – 4096 значений). В средней части рис. 3.9 показаны соответствующие спектры вейвлет-энергий (материнский вейвлет – db4), а в нижней - зависимость  $\log_2(E_j)$  от уровня разложения  $j$ . Как видно из приведенных рисунков, можно исключить влияние низкочастотных компонент на оценивание показателя Херста, не учитывая при вычислениях коэффициенты на более высоких уровнях (низких частотах) и вновь оценивая показатель Херста. На рис. 3.9 показано определение показателя Херста без учета (сплошная линия 2) и с учетом (пунктирная линия 1) трендовых компонент. Оценивание  $H$  без учета уровней разложения, где проявляется влияние

трендовых и циклических компонент, дает корректные результаты вычислений.

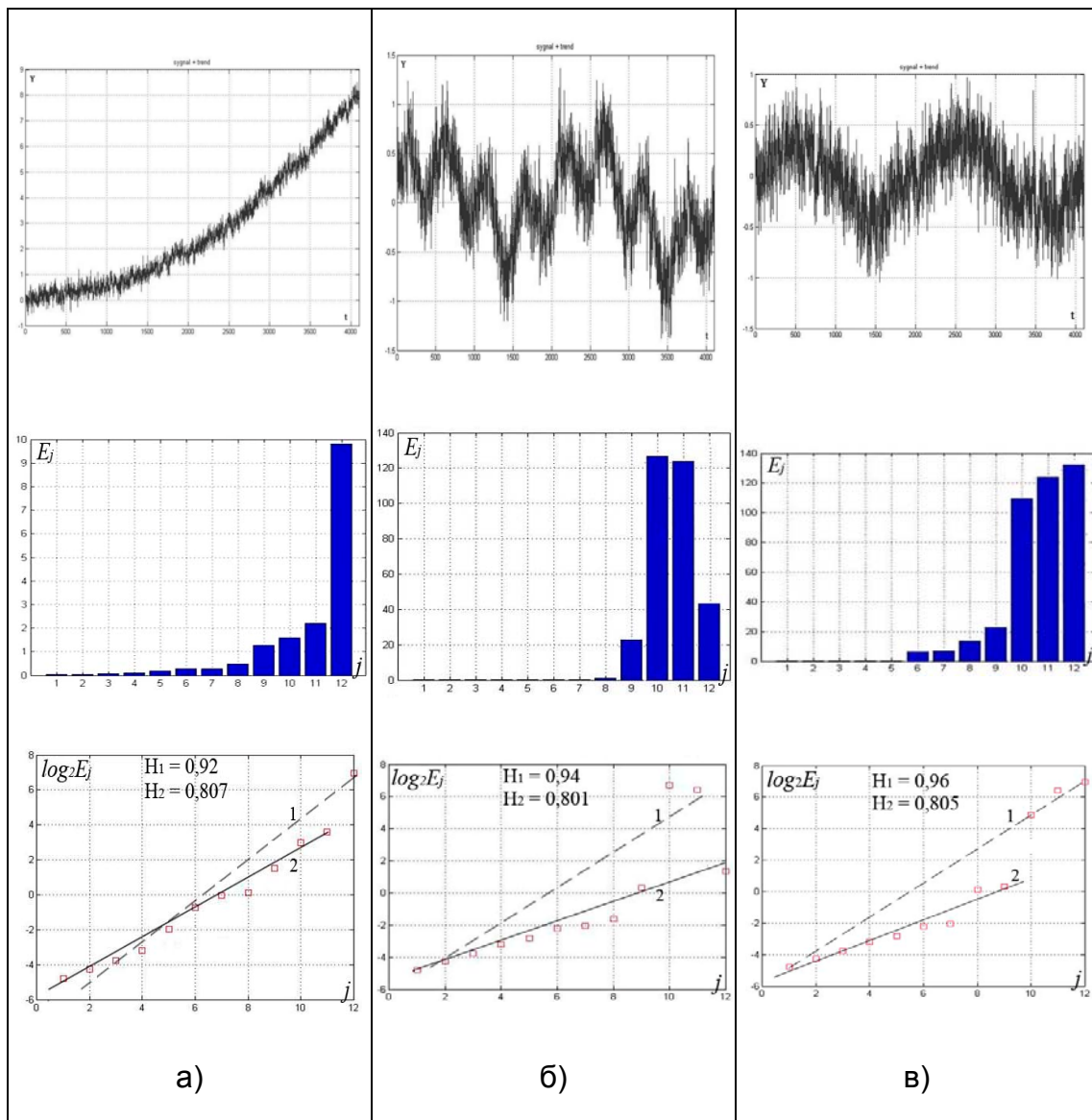


Рисунок 3.9 – Модельные сигналы, спектры вейвлет-энергии, логарифмические зависимости с трендовыми компонентами: а) кубический полином порядка; б) линейный полином и сумма синусов; в) синусоида

В работе [Дейнеко, 2010] предложен метод вейвлет-оценивания показателя Херста для временных рядов со значительными трендовыми и циклическими составляющими, состоящий из нескольких этапов:

Этап 1. Предварительное исследование временного ряда. Анализ временных рядов путем вейвлет-разложения на составные компоненты, выделение трендовых и циклических компонент.

Этап 2. Анализ трендовых и циклических компонент, оценивание порядка  $m$  полиномиального тренда с целью выбора эффективной материнской вейвлет-функции.

Этап 3. Определение значения параметра  $Ratio$ . Если значение лежит внутри диапазона корректного оценивания ( $Ratio < Ratio^*$ ), то показатель Херста оценивается по временному ряду с помощью выбранного материнского вейвлета с числом нулевых моментов  $p > m$ .

Этап 4. Если значение  $Ratio > Ratio^*$ , то необходимо сделать преобразование спектра вейвлет-энергии: выявить уровни разложения, соответствующие трендовым компонентам и отбросить их при оценке наклона графика функции  $\log_2(E_j)$  от  $j$ .

---

### **3.4 Комплексный подход к оцениванию фрактальных свойств самоподобных временных рядов**

---

Подводя итоги исследований, представленных во 2-ом и 3-ем разделах, можно предложить следующую схему проведения фрактального анализа некоторого случайного фрактального процесса, представленного временным рядом длины  $N$  [Кириченко, 2014]. В основных этапах фрактального анализа задействованы методы нормированного размаха, ДФА и вейвлет-оценивания. Поскольку для применения аппарата вейвлет-преобразований необходимо соответствующее программное обеспечение и опыт работы, описание алгоритма построено таким образом, что

---

использование методов вейвлет-оценивания является желательным, но не обязательным элементом. Однако применение метода ДФА является необходимым по двум причинам: этот метод обладает достаточной точностью и предназначен для работы с нестационарными временными рядами. Рассмотрим поэтапную реализацию комплексного подхода к оцениванию фрактальных свойств самоподобных временных рядов.

**Этап 1. Предварительное исследование структуры временного ряда.**

1. Прежде чем приступать к фрактальному анализу временного ряда, необходимо выяснить из априорно известной информации, является ли ряд кумулятивным (например, курс валюты) или нет (например, информационный трафик). Если по своей природе ряд является кумулятивным, то все ниже указанные этапы фрактального анализа относятся к соответствующему ряду приращений.

2. Определение интервалов различных скейлингов.

Если самоподобный процесс обладает несколькими скейлингами, зависящими от временных интервалов (например дневные и часовые данные для валютных рядов), то на каждом таком интервале динамика временного ряда определяется соответствующим показателем Херста. Для определения таких интервалов надо построить функциональную зависимость  $H(\tau) = f[\log \frac{R}{S}(\tau)]$  совместно с функцией (3.2).

Кроме метода нормированного размаха для выявления интервалов разных скейлингов можно использовать построение флуктуационной функции  $F_{DFA}(\tau)$  методом ДФА (3.5). Поскольку данный этап является прикидочным, степень локального полиномиального тренда можно выбрать завышенной. Если существует несколько скейлингов, функция

$F_{DFA}(\tau)$  изменит угол наклона. Однако, в отличие от метода нормированного размаха, который исследует долгосрочную зависимость временного ряда в диапазоне всей его длины, флуктуационная функция может быть корректно построена только на интервале до значений  $N / 4$ .

3. Выявление и удаление краткосрочной авторегрессионной зависимости. Проверка гипотезы о наличии самоподобия.

Наличие авторегрессионной зависимости смещает значения показателя Херста и демонстрирует ложную долговременную память. При устранении авторегрессионной зависимости по формуле (3.5) определяется остаточный ряд. Если авторегрессионная зависимость является значимой, то все ниже указанные этапы фрактального анализа относятся к остаточному временному ряду.

Если значение степени самоподобия близко к 0.5, необходимо проверить гипотезу о наличии самоподобия. Качественной проверкой наличия свойств статистического самоподобия является построение агрегированных временных рядов согласно формуле и построение для них выборочных функций распределения. В случае самоподобия агрегированные ряды имеют одинаковое распределение, подтвержденное статистическими критериями.

### ***Этап 2. Исследование стационарности временного ряда. Оценивание показателя Херста по стационарному ряду.***

Для оценивания показателя Херста надо определить, является ли ряд стационарным или нет известными статистическими методами. Если ряд стационарен, то степень самоподобия и интервальную оценку показателя Херста можно определить методами, рассмотренными в преидущей статье.

**Этап 3. Оценивание показателя Херста по нестационарному ряду.**

1. Если исследуемый временной ряд нестационарен, необходимо исследовать его структуру с помощью построения корреляционной функции (спектральной плотности) и спектра вейвлет-энергии, которые позволяют выявить трендовые и циклические составляющие ряда.

2. При оценивании показателя Херста методом ДФА, необходимо сначала провести прикидочное оценивание, используя локальные полиномы увеличивающейся степени и определить наименьшую степень полинома, начиная с которой оценка показателя Херста перестает изменяться. После этого для оценивания самоподобия временного ряда необходимо удалять локальный полиномиальный тренд найденной степени. Интервальную оценку показателя Херста для временного ряда длиной  $N$  можно определить согласно формуле (2.22).

3. Вейвлет–оценивание нестационарного временного ряда проводится согласно методу, представленному в подразделе 3.3. Интервальная оценка показателя определяется по формуле (2.22).

**Этап 4. Уточнение полученной оценки показателя Херста.**

Если оценки были получены разными методами, то для увеличения точности оценки показателя Херста можно использовать среднее арифметическое этих оценок, полученных с помощью нескольких методов оценивания. Если проводилось вейвлет-оценивание с разными вейвлет-функциями, то более точной будет среднее арифметическое этих оценок.



## Выводы

---

1. Рассмотрены методы исследований, предваряющие проведение фрактального анализа, которые включают в себя проверку гипотезы о наличии самоподобия, определение интервалов различных скейлингов, выявление и удаление краткосрочной зависимости.

2. Получил дальнейшее развитие метод оценивания показателя Херста ДФА для фрактальных рядов с трендовыми компонентами различного вида. Проведенные в статье численные исследования для фрактальных рядов с полиномиальными трендовыми составляющими порядка  $p$  показали, что адекватное оценивание параметра Херста достигается при использовании локального полиномиального тренда порядка  $m > p$ . В общем случае для рядов с трендовыми компонентами различного вида необходимо сначала провести прикидочное оценивание, используя локальные полиномы увеличивающейся степени, и определить наименьшую степень полинома, начиная с которой оценка показателя Херста перестает изменяться.

3. Исследовано воздействие трендовых и циклических составляющих на свойства оценок показателя Херста в зависимости от вида трендовой компоненты и параметров материнских вейвлет-функций. Определен диапазон отношения трендовой компоненты к фрактальному шуму, на котором корректно оценивается показатель Херста.

4. Предложен метод вейвлет-оценивания показателя Херста для временных рядов со значительными трендовыми и циклическими составляющими, основанный на анализе компонент спектра вейвлет-энергии и выделении диапазонов частот трендовой и циклической компонент ряда.

5. Предложен комплексный подход к оцениванию фрактальных свойств самоподобных временных рядов и предложены практические рекомендации по реализации данного подхода.

---

## Литература

---

- [Feller, 1951] Feller W. The asymptotic distribution of the range of sums of independence variables. *Annals of mathematics and statistics*, France, University of Nancy, 1951. – 306 p.
- [Hurst, 1951] Hurst H. E. The Long-Term Storage Capacity of Reservoirs. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, Vol. 116, 1951. pp. 770–799.
- [Hurst, 1955] Hurst H. E. Methods of using long-term storage in reservoirs. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, Part 1, London, 1955. pp. 519–577.
- [Kantelhardt, 2001] Kantelhardt, J. W., Koscielny-Bunde, E., Havlin, S., et al. Detecting long-range correlations with detrended fluctuation analysis. *Physica A., Statistical Mechanics and its Applications*, Vol. 295, № 3–4, 2001. pp. 441–454.
- [Kirichenko, 2011] Kirichenko, L., Radivilova, T., Deineko, Zh. Comparative Analysis for Estimating of the Hurst Exponent for Stationary and Nonstationary Time Series. *Information Technologies & Knowledge*, Vol.5, № 4, 2011. pp. 371–388.
- [Mandelbrot, 1969] Mandelbrot, B., Wallis, J. R. Robustness of the Rescaled Range R/S in the Measurement of Noncyclic Long-Run Statistical Dependence. *Water Resources Research*, Vol. 5, 1969. pp. 967–988.
- [Mandelbrot, 1979] Mandelbrot, B., Taqqu, M. S. Robust R/S analysis of long-run serial correlation. *Bulletin of the International Statistical Institute*,

Proceedings of the 42nd Session of the International Statistical Institute, Manila. Book 2, Vol.48,1979. pp. 69–104.

[Taqqu, 1995] Taqqu, M. S., Teverovsky, V., Willinger, W. Estimators for long-range dependence: an empirical study. *Fractals*, Vol. 3, № 4, 1995. P. 785–798.

[Taqqu, 1996] Taqqu M. S., Teverovsky, V. Semi-parametric graphical estimation techniques for long-memory data. *Lecture Notes in Statistics*, Vol. 115– 1996. pp. 420–432.

[Дейнеко, 2010] Дейнеко, Ж. В., Кириченко, Л. О. Оценивание параметра Хёрста для временных рядов с трендом методом вейвлет-преобразования. *Системы управління, навігації та зв'язку*, Вип. 4 (16), 2010. сс. 85–89.

[Кендэл, 1981] Кендэл М. Временные ряды. М. :Финансы и статистика, 1981. 198с.

[Кириченко, 2014] Кириченко Л.О., Чалая Л.Э. Комплексный подход к исследованию фрактальных временных рядов. *Information Technologies & Knowledge, International Journal*, Vol. 8, № 1, 2014. pp. 22-28.

[Малла, 2005] Малла С. Вэйвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005. 671 с.

[Петерс, 2000]. Петерс Э. Хаос и порядок на рынках капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка : пер. с англ. М. : Мир, 2000. 333 с.

[Петерс, 2004] Фрактальный анализ финансовых рынков. Применение теории хаоса в инвестициях и экономике : пер. с англ. М : Интернет-трейдинг, 2004. 304 с.

[Федер, 1991] Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991. 254 с.

[Ширяев, 1998] Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. М. : Фазис, Т. 1: Факты. Модели, 1998. 512 с.

---

## Информация об авторах

---



**Людмила Кириченко** – д.т.н., профессор Харьковского национального университета радиоэлектроники; пр. Науки 14, 61166, Харьков, Украина; e-mail: [lyudmyla.kirichenko@nure.ua](mailto:lyudmyla.kirichenko@nure.ua).

Основные области научных исследований: самоподобные и мультифрактальные временные ряды, фрактальный анализ, вейвлет-анализ, детерминированные хаотические системы.



**Тамара Радивилова** – к.т.н., доцент Харьковского национального университета радиоэлектроники; пр. Науки 14, 61166, Харьков, Украина; e-mail: [tamara.radivilova@gmail.com](mailto:tamara.radivilova@gmail.com).

Основные области научных исследований: самоподобные и мультифрактальные временные ряды, телекоммуникационные системы, управление трафиком, информационная безопасность.