

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ХАРАКТЕРИСТИКИ И МОДЕЛИ САМОПОДОБНЫХ И МУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Людмила Кириченко, Тамара Радивилова

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время стало общепризнанным, что многие информационные, биологические, физические, технологические процессы обладают сложной фрактальной структурой. Фрактальный анализ используется для моделирования, анализа и контроля сложных систем в различных областях науки и техники. В частности, в геологии – для прогнозирования сейсмической активности и цунами, определения возраста геологических пород; в биологии и медицине – для диагностики заболеваний и физиологического состояния по записям ЭКГ и ЭЭГ, при исследовании мутаций и изменений на генетическом уровне; в экономике – для прогнозирования кризисных ситуаций и оценивания риска по финансовым рядам; в физике – для исследования турбулентности и термодинамических процессов. Этот список далеко не полон.

Процессы, обладающие фрактальными свойствами, можно разделить на две группы: самоподобные (монофрактальные) и мультифрактальные. Мультифрактальные объекты являются статистически неоднородными самоподобными объектами. Для мультифрактальных временных рядов статистическая неоднородность объекта выражается в неоднородности распределения данных ряда, т.е. наличии тяжелых хвостов плотности распределения вероятностей временного ряда. В сравнении с самоподобными, мультифрактальные процессы проявляют более сложное скейлинговое поведение.

1.1 Основные понятия и свойства самоподобных случайных процессов

Основные понятия и определения самоподобных случайных процессов были приведены в работах [Leland, 1993; Taqqu, 1995; Taqqu, 1997; Willinger, 1997; Mandelbrot, 1983; Федер, 1991].

1.1.1 Самоподобный стохастический процесс с непрерывным временем

Стохастический процесс $X(t)$, $t \in \mathbb{R}$ с непрерывной переменной времени называется самоподобным в узком смысле с параметром H , $0 < H < 1$, если для любого вещественного значения $a > 0$ конечномерные распределения для $X(at)$, $t \in \mathbb{R}$ идентичны конечномерным распределениям $a^{-H}X(at)$, $t \in \mathbb{R}$, т.е. если для любых $k \geq 1$, $t_1, t_2, \dots, t_k \in \mathbb{R}$ и любых $a > 0$:

$$\text{Law}\{X(t_2), \dots, X(t_k)\} = \text{Law}\{a^{-H}(X(at_1), a^{-H}X(at_2), \dots, a^{-H}X(at_k))\} \quad (1.1)$$

Кратко уравнение (1.1) можно записать в виде:

$$\text{Law}\{X(t), t \in \mathbb{R}\} = \text{Law}\{a^{-H}X(at), t \in \mathbb{R}\}. \quad (1.2)$$

Обозначение $\text{Law}\{\cdot\}$ означает конечномерные законы распределения случайного процесса. Параметр H , называемый параметром Херста, представляет собой меру самоподобия стохастического процесса.

Стохастический процесс $X(t)$ является статистически самоподобным или самоподобным в широком смысле, если процесс $a^{-H}X(at)$ обладает теми же статистическими характеристиками второго порядка (математическим ожиданием $M[X(t)]$, дисперсией $D[X(t)]$ и автокорреляционной функцией $r_x(t,s)$), что и $X(t)$:

$$M[X(t)] = \frac{M[X(at)]}{a^H}$$

$$D[X(t)] = \frac{D[X(at)]}{a^{2H}}$$

$$r_x(t,s) = \frac{r_x(at,as)}{a^{2H}}.$$

Легко показать, положив $a=1/t$, что для самоподобного процесса выполняется следующее равенство:

$$\text{Law}\{X(t)\} = \text{Law}\left\{\left(\frac{1}{t}\right)^{-H} X(1)\right\} = \text{Law}\{t^H X(1)\} \quad (1.3)$$

Учитывая (1.2), начальные моменты самоподобного случайного процесса можно выразить как

$$M\left[|X(t)|^q\right] = M\left[|t^H X(1)|^q\right] = t^{qH} M\left[|X(1)|^q\right] = C(q) \cdot t^{qH} \quad (1.4)$$

где величина $C(q) = M\left[|X(1)|^q\right]$.

Важным классом случайных процессов, часто встречающихся в различных областях естествознания и техники, являются случайные процессы, которые имеют стационарные приращения. Случайный процесс $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$, имеющий стационарные приращения, является самоподобным, если

$$\text{Law}\{X(t + \Delta t) - X(t)\} = \text{Law}\{X(t) - X(0)\}, \quad \forall t, \Delta t \in \mathbb{R} \quad (1.5)$$

Такие процессы имеют среднее значение, равное 0, дисперсия определяется как $M\left[X^2(t)\right] = \sigma^2 |t|^{2H}$, а корреляционная функция зависит только от моментов времени t и s :

$$M\{X(t), X(s)\} = \frac{\sigma^2}{2} \left\{ |t|^{2H} + |s|^{2H} - |t - s|^{2H} \right\}. \quad (1.6)$$

1.1.2 Самоподобный стохастический процесс с дискретным временем

Рассмотрим понятие самоподобия для процессов с дискретным временем. Пусть $X = (X_1, X_2, \dots)$ – отрезок стационарного в широком смысле случайного процесса с дискретным временем $t \in N = \{1, 2, \dots\}$. Допустим, процесс X имеет автокорреляционную функцию следующего вида:

$$r(k) \sim k^{-\beta} L_1(k), \quad k \rightarrow \infty, \quad (1.7)$$

где $0 < \beta < 1$ и L_1 – медленно меняющаяся на бесконечности функция, то есть $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L_1(tx)}{L_1(t)} = 1$ для всех $x > 0$.

Обозначим через $X^{(m)} = \{X_1^{(m)}, X_2^{(m)}, \dots\}$ – усредненный по блокам длины m процесс X , компоненты которого определяются равенством

$$X_t^{(m)} = \frac{1}{m} (X_{tm-m+1} + \dots + X_{tm}), \quad \dots \quad (1.8)$$

Такой ряд называется агрегированным. Обозначим через $r_m(k)$ и Var_m коэффициент корреляции и дисперсию процесса $X^{(m)}$ соответственно. Процесс X называется строго самоподобным в широком смысле с параметром $H = 1 - (\beta / 2)$, $0 < \beta < 1$, если

$$r_m(k) = r(k), \quad k \in Z_+, \quad m \in \{2, 3, \dots\},$$

то есть, процесс не меняет свой коэффициент корреляции после усреднения по блокам длины m . Другими словами, X является самоподобным в широком смысле, если агрегированный процесс $X^{(m)}$ неотличим от исходного процесса X в отношении статистических характеристик второго порядка.

Процесс X называется асимптотически самоподобным в широком смысле с параметром $H = 1 - (\beta / 2)$, $0 < \beta < 1$ если

$$\lim_{m \rightarrow \infty} r_m(k) = r(k), \quad k \in N.$$

Процесс X называется самоподобным в узком смысле с параметром $H = 1 - (\beta / 2)$, $0 < \beta < 1$, если справедливо выражение

$$\text{Law}\{m^{1-H} X^{(m)}\} = \text{Law}\{X\}, \quad m \in N. \quad (1.9)$$

1.1.3 Долгосрочная зависимость и тяжелые хвосты распределений

Понятие медленно убывающей зависимости имеет ключевое значение в теории самоподобных процессов и описывает долгосрочную память процесса: будущее процесса определяется его прошлым, причем с убывающей степенью влияния по мере того, как прошлое удалено от настоящего. Таким образом, процесс с продолжительной памятью как бы "забывает" свое относительно давнее прошлое по мере продвижения времени в будущее.

Процесс X обладает медленно убывающей зависимостью, если выполняется отношение (1.7). Таким образом, процессы с медленно убывающей зависимостью характеризуются автокорреляционной функцией, которая убывает гиперболически (по степенному закону) при увеличении временной задержки. Можно показать, что из (1.7) следует несуммируемость автокорреляционной функции, то есть $\sum_k r(k) = \infty$. В

отличие от процессов с медленно убывающей зависимостью, процессы с быстро убывающей зависимостью обладают экспоненциально спадающей автокорреляционной функцией вида

$$r(k) \sim \rho^k, \quad k \rightarrow \infty, \quad 0 < \rho < 1,.$$

и, как следствие, суммируемостью автокорреляционной функции:

$$0 < \sum_k r(k) < \infty.$$

Дискретные самоподобные процессы обладают медленно убывающей автокорреляционной функцией агрегированного процесса $X^{(m)}$ при $m \rightarrow \infty$ в отличие от распространенных стохастических моделей для которых выполняется

$$r_m(k) \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \quad k \in N.$$

Задание автокорреляционной функции в виде (1.7) равносильно определению процесса со следующей дисперсией:

$$\sigma^2 \sim am^{-\beta}, \quad m \rightarrow \infty,$$

где a – конечная положительная константа, не зависящая от m ; $0 < \beta < 1$.

Т.е. долгосрочная зависимость подразумевает свойство самоподобия в широком смысле со значением показателя $H > 0.5$ и наоборот.

Большинство процессов, обладающих долгосрочной зависимостью, обладают тяжелыми хвостами одномерной функции распределения вероятностей. Случайная величина X имеет распределение с тяжелым хвостом, если

$$P[X > x] \sim c \cdot x^{-\alpha}, \quad x \rightarrow \infty, \quad (1.10)$$

где величина α , $0 < \alpha < 2$, называется параметром формы; c – некоторая положительная константа.

В отличие от распределений с легкими хвостами, такими как экспоненциальное или гауссовское, которые имеют экспоненциальное убывание хвоста, случайные величины с тяжелым хвостом обладают хвостами, спадающими по степенному (гиперболическому) закону. При $0 < \alpha < 2$ случайные величины имеют бесконечную дисперсию, а при $0 < \alpha \leq 1$ еще и обладают бесконечным средним. Основное свойство случайной величины, распределенной с тяжелым хвостом, состоит в том, что она проявляет высокую изменчивость. Иными словами, ее выборка представляет собой в основном относительно небольшие значения, однако также содержит и достаточное количество очень больших значений.

Параметр Херста H , называемый параметром самоподобия, находится в диапазоне $0 < H < 1$ и представляет собой ключевую меру самоподобия и меру длительности долгосрочной зависимости стохастического процесса.

В случае $0.5 < H < 1$ говорят о персистентном (поддерживаемом) поведении процесса, либо о том, что процесс обладает длительной памятью. Другими словами, если в течение некоторого времени в прошлом наблюдались положительные приращения процесса, то есть происходило

увеличение, то и впредь в среднем будет происходить увеличение. Иначе говоря, вероятность того, что процесс на $i+1$ шаге отклоняется от среднего в том же направлении, что и на i шаге настолько велика, насколько параметр H близок к 1. Таким образом, персистентные стохастические процессы обнаруживают четко выраженные тенденции изменения при относительно малом шуме.

В случае $0 < H < 0.5$ говорят об антиперсистентном процессе. Здесь высокие значения процесса следуют за низкими, и наоборот. Другими словами, вероятность того, что на $i+1$ шаге процесс отклоняется от среднего в противоположном направлении (по отношению к отклонению на i шаге) настолько велика, насколько параметр H близок к 0.

При $H = 0.5$ отклонения процесса от среднего являются действительно случайными и не зависят от предыдущих значений, что соответствует случаю обычного броуновского движения.

1.2 Мультифрактальные процессы

Мультифрактальные меры были введены Б.Мандельбротом [Mandelbrot, 1974] для описания распределения турбулентной диссипации. С тех пор мультифрактальные структуры были обнаружены во множестве природных и технических процессов и используются для моделирования и исследования турбулентных процессов, телекоммуникационных потоков, финансовых рынков, медицинских данных, геофизических процессов.

Мультифрактальность – это концепция, которая, с некоторыми незначительными изменениями, может быть в равной степени хорошо применена к функциям и мерам, детерминированным или стохастическим. В описании основных понятий и свойств мультифрактальных процессов существует несколько подходов: глобальный, при котором основные определения и свойства выводятся через свойства моментов случайных процессов [Calvet, 1997; Riedi, 2002; Kantelhardt, 2008; Abry, 2009];

локальный, описывающий локальные масштабные и сингулярные свойства фрактальных реализаций и функций и основанный на свойствах локальных экспонент Гельдера [Feder, 1988; Riedi, 2002; Kantelhardt, 2002; Abry, 2009]; и подход, основанный на свойствах фрактальных и мультифрактальных мер (множеств) [Mandelbrot, 2001; Riedi, 2002; Abry, 2009].

1.2.1. Законы распределения и моментные характеристики мультифрактальных процессов

В отличие от самоподобных процессов (1.2) мультифрактальные процессы обладают более разнообразным скейлинговым поведением [Riedi, 2002]:

$$\text{Law}\{X(at)\} = \text{Law}\{M(a) \cdot X(t)\}, \dots \quad (1.11)$$

где $M(a)$ - независимая от $X(t)$ случайная функция.

В случае самоподобного процесса $M(a) = a^H$. Для мультифрактальных процессов обобщенный показатель Херста $H(a) = \log_a M(a)$ является случайной функцией аргумента a . Соотношение (1.11) можно переформулировать следующим образом:

$$\text{Law}\{X(at)\} = \text{Law}\{a^{H(a)} \cdot X(t)\}, \quad (1.12)$$

Свойство мультифрактальности (1.12) устанавливает достаточно жесткие ограничения на законы распределения случайных функций $M(a)$ и $X(t)$. Для случайной скейлинговой функции $M(a)$ должно выполняться следующее условие:

$$\text{Law}\{M(ab)\} = \text{Law}\{M_1(a) \cdot M_2(b)\}, \quad (1.13)$$

где $M_1(a)$ и $M_2(a)$ независимы и имеют тот же закон распределения, что и $M(a)$.

Для мультифрактального процесса $X(t)$ должно следовать, что если выполняется условие $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$, то отношение (1.12) влечет за собой следующее:

$$\text{Law}\left\{\frac{X(a_2t)}{X(a_1t)}\right\} = \text{Law}\left\{\frac{X(a_3t)}{X(a_2t)}\right\}.$$

Из этих свойств вытекает определяющее свойство мультифрактальных процессов [Calvet, 1997; Mandelbrot, 2001; Riedi, 2002]: процесс $X(t)$ является мультифрактальным, если выполняется следующее отношение:

$$\mathbb{M}\left[|X(t)|^q\right] = c(q) \cdot t^{\tau(q)+1}, \quad \forall t \in T, \quad \forall q \in \mathbb{Q}, \quad (1.14)$$

где $c(q)$ и $\tau(q)$ – некоторые детерминированные функции. Величины T и \mathbb{Q} являются интервалами ненулевой длины на действительной оси, и $0 \in T$, $[0,1] \subset \mathbb{Q}$.

Мультифрактальные процессы, таким образом, обладают глобальным скейлингом, в том смысле, что его моменты удовлетворяют скейлинговому

соотношению (1.14). Функция $\tau(q)$ называется скейлинговой экспонентой мультифрактального процесса. Из (1.14) вытекают некоторые свойства функции $\tau(q)$: $\tau(0) = -1$; $\tau(1) = 0$, $\tau(q)$ – выпуклая функция.

Обобщенный показатель Херста $h(q)$ связан с функцией соотношением [Kantelhardt, 2002]:

$$\tau(q) = qh(q) - 1. \quad (1.15)$$

Самоподобные процессы являются подклассом мультифрактальных. Для самоподобных процессов скейлинговая экспонента линейна: $\tau(q) = Hq - 1$

и значение $\frac{\tau+1}{q}$ при $q = 2$ совпадает со значением степени самоподобия

H .

1.2.2 Характеристики мультифрактальных множеств

Самоподобие фрактальных объектов заключается в сохранении структуры объекта при изменении масштаба. Рассмотрим основные характеристики мультифрактального множества [Божокин, 2001]. Пусть в общем случае мультифрактальный объект занимает некоторую ограниченную область в d -мерном Евклидовом пространстве и определяет собой множество из $N \rightarrow \infty$ точек. Разобьем всю область на кубические ячейки с ребром ε и объемом ε^d . Рассмотрим обобщенную статистическую сумму $Z(q, \varepsilon)$, характеризуемую показателем степени q , который может принимать любые значения в интервале $-\infty < q < +\infty$:

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q(\varepsilon), \quad (1.16)$$

где $p_i(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_i(\varepsilon)}{N}$; $n_i(\varepsilon)$ – количество точек, попавшее в ячейку с номером i ; $N(\varepsilon)$ – суммарное количество занятых ячеек, которое зависит от размера ячейки ε .

Вероятности p_i характеризуют относительную заселенность ячеек. В общем случае мультифрактальное множество характеризуется некоторой нелинейной функцией $\tau(q)$, определяющей поведение статистической суммы $Z(q, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$Z(q, \varepsilon) \propto \varepsilon^{\tau(q)}. \quad (1.17)$$

Функция $\tau(q)$ обычно называется скейлинговой экспонентой и определяется как

$$\tau(q) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln Z(q, \varepsilon)}{\ln \varepsilon}. \quad (1.18)$$

В случае однородного фрактального множества с фрактальной размерностью D во всех занятых ячейках содержится одинаковое

количество точек, т.е., $p_i(\varepsilon) = p(\varepsilon) = 1 / N(\varepsilon)$, и обобщенная статистическая сумма принимает вид:

$$Z(q, \varepsilon) = N^{1-q}(\varepsilon) = \varepsilon^{-D(1-q)},$$

а функция $\tau(q) = (q-1)D$ является линейной. Если распределение точек по ячейкам не одинаково, то фрактальное множество является неоднородным, т.е. мультифрактальным, и $\tau(q)$ является нелинейной функцией. При $q \rightarrow +\infty$ основной вклад в обобщенную статистическую сумму вносят ячейки, содержащие наибольшее число частиц n_i и, следовательно, характеризующиеся наибольшей вероятностью заполнения p_i . Наоборот, при $q \rightarrow -\infty$ основной вклад в сумму дают самые разреженные ячейки с малыми значениями p_i . Таким образом, функция $\tau(q)$ показывает, насколько неоднородным является исследуемое множество точек.

Функция мультифрактального спектра (спектра сингулярностей) $f(\alpha)$ в данном случае вводится следующим образом. Зависимость вероятности от размера ячейки $p_i(\varepsilon)$ имеет степенной характер

$$p_i(\varepsilon) \propto \varepsilon^{\alpha_i}, \quad (1.19)$$

где α_i представляет собой некоторый показатель степени, вообще говоря разный, для разных ячеек (показатель сингулярности). Для однородного

фрактала все показатели степени α_i одинаковы и равны фрактальной размерности D .

Функция мультифрактального спектра $f(\alpha)$ характеризует распределение вероятностей различных значений α_i . Если величина $n(\alpha)d\alpha$ является вероятностью того, что α_i находится в интервале $(\alpha, \alpha+d\alpha)$, т.е. представляет собой число ячеек i , обладающих одинаковой мерой $p_i(\varepsilon)$ с $\alpha_i \in (\alpha, \alpha+d\alpha)$, тогда

$$n(\alpha) \approx \varepsilon^{-f(\alpha)}. \quad (1.20)$$

Таким образом, функция $f(\alpha)$ представляет собой фрактальную размерность некоего однородного фрактального подмножества ξ_α из исходного множества ξ , характеризуемого одинаковыми вероятностями заполнения ячеек $p_i(\varepsilon) \approx \varepsilon^\alpha$.

Учитывая выражения (1.16) и (1.20), обобщенную статистическую сумму $Z(q, \varepsilon)$ можно выразить через функцию мультифрактального спектра $f(\alpha)$ следующим образом:

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q(\varepsilon) \approx \int d\alpha n(\alpha) \varepsilon^{q\alpha} \approx \int d\alpha \varepsilon^{q\alpha - f(\alpha)}.$$

Формально переход от переменных $\{q, \tau(q)\}$ к переменным $\{\alpha, f(\alpha)\}$ может быть осуществлен при помощи следующих преобразований Лежандра:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{d\tau}{dq}, \\ f(\alpha) = q \frac{d\tau}{dq} - \tau \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left\{ \begin{array}{l} q = \frac{df}{d\alpha}, \\ \tau(q) = \alpha \frac{df}{d\alpha} - f. \end{array} \right. \quad (1.21)$$

1.3 Некоторые модели самоподобных и мультифрактальных процессов

Для анализа и сравнения методов оценивания, а также разработки новых, необходимо моделировать временные реализации самоподобных и мультифрактальных процессов.

1.3.1 Модели фрактального броуновского движения.

Фрактальное (обобщенное) броуновское движение (ФБД) впервые предложено и исследовано Б. Мандельбротом [Mandelbrot, 1968]. В дальнейшем класс моделей, основанных на ФБД, получил дальнейшее развитие во многих работах [Feder, 1988].

При обычном случайном блуждании частицы, для любой пары моментов времени t и t_0 , приращение ΔX координаты частицы задается выражением

$$X(t) - X(t_0) \sim \xi |t - t_0|^H,$$

где $H = 1/2$; ξ – случайная величина со стандартным нормальным распределением.

Обобщенное (фрактальное) броуновское движение $B_H(t)$ вводится путем замены показателя $H = 1/2$ на действительное число из интервала $[0, 1]$. Фрактальное броуновское движение также может быть получено из обычного броуновского движения взятием интеграла:

$$B_H(t) = \frac{1}{\Gamma(H + 0.5)} \int_{-\infty}^t (t - u)^{H-0.5} dB(u),$$

где $\Gamma(x)$ – гамма функция. Таким образом, значение $B_H(t)$ в момент времени t зависит от всех предыдущих ($u < t$) приращений $dB(u)$ простого броуновского движения. Приращения этого процесса (фрактальный гауссовский шум) имеют нулевое математическое ожидание и дисперсию, зависящую от времени

$$\text{Var}(B_H(t) - B_H(t_0)) = \text{Var}[\xi] \cdot |t - t_0|^{2H}.$$

Корреляционная функция фрактального гауссовского шума имеет вид

$$r(k) = \frac{1}{2} [(k+1)^{2H} - 2k^{2H} + (k-1)^{2H}]. \quad \text{Можно показать, что}$$

$$r(k) \sim H(2H-1)|k|^{-\beta}, \quad k \rightarrow \infty, \quad 0 < H < 1, \quad \beta = 2 - 2H, \quad \text{а также, что}$$

усредненный процесс $X^{(m)}$ имеет такое же распределение, как и процесс

X для всех $0 < H < 1$. Таким образом ФГШ является строго самоподобным процессом.

Методы построения моделей самоподобных временных рядов на основе ФБД для случая дискретного времени рассмотрены, в частности, в работах [Feder, 1988; Кроновер, 2000]. Модели, получаемые с использованием этих методов, обладают определенными недостатками, одним из которых является занижение (завышение) степени самоподобия процесса при малых или больших теоретических значениях параметра Херста и небольшой длине модельной реализации [Feder, 1988; Jeongy, 1998; Шелухин, 2008].

Широко используемым на практике методом построения моделей ФБД является метод последовательного случайного сложения Фосса. Опишем пошаговый алгоритм его реализации [Feder, 1988]. Исходные значения координат $X(t_i)$ в моменты времени $t_i = 0, 1/2, 1$ равны нулю. На первом шаге к значениям координат $X(t_1)$, $X(t_2)$, $X(t_3)$ прибавляются случайные числа, выбранные из нормального распределения с нулевым средним и начальной дисперсией σ_1^2 . Средние значения времени на каждом интервале рассматриваются как дополнительные узлы на оси времени; значения координаты в них оцениваются интерполяцией. На следующем шаге ко всем координатам $X(t_i)$ ($t_i = 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1$) прибавляются случайные числа с нулевым средним значением и уменьшенной дисперсией $\sigma_2^2 = \frac{\sigma_1^2}{2^{2H}}$. На n -ом шаге алгоритма мы получаем значения реализации ФБД для $1+2^n$ значений времени t_i .

Дисперсия слагаемых n -го поколения равна $\sigma_n^2 = \frac{\sigma_{n-1}^2}{2^{2H}} = \frac{\sigma_0^2}{2^{2Hn}}$. Процесс, предложенный Фоссом, приводит к обобщенному броуновскому движению при любом разрешении.

Другим распространенным методом построения моделей ФБД для дискретного времени является метод Селлана-Мейера, использующий

биортогональные вейвлеты [Meyer, 1995; Sellan, 1995]. В этом случае построение реализации ФБД осуществляется с помощью дискретного вейвлет-преобразования, где детализирующие вейвлет-коэффициенты на каждом уровне являются независимыми нормально распределенными случайными величинами, а аппроксимирующие вейвлет-коэффициенты получены с помощью фрактального процесса авторегрессии и скользящего среднего FARIMA:

$$B_H(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi_H(t-k) S_k^{(H)} + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-jH} \Psi_H(2^j t - k) \varepsilon_{j,k} - b_0,$$

где Ψ_H – биортогональная базовая вейвлет-функция; Φ_H – соответствующая Ψ_H скейлинг-функция; $S_k^{(H)}$ – стационарный гауссовский процесс FARIMA с параметром дробного дифференцирования $d = H - 0.5$; $\varepsilon_{j,k}$ – независимые стандартные нормальные случайные величины; b_0 – константа, такая, что $B_H(0) = 0$.

В работе [Кириченко, 2009] было проведено исследование фрактальных свойств реализаций моделей ФБД, полученных как по методу последовательного случайного сложения (метод Фосса), так и по методу вейвлет-преобразования (метод Селлана-Мейера). Приведенные результаты свидетельствуют, что модель ФБД, реализованная с помощью вейвлет-преобразования, более корректно отображает степень самоподобия для выборок с диапазоном длины 200-10000 значений. Однако следует отметить, что время генерации данной модели в среднем на порядок больше времени генерации ФБД по методу Фосса. В дальнейшем будут приведены результаты численных экспериментов, где реализации фрактального процесса получены с помощью метода

Селлана-Мейера. На рис.1.1 представлены реализации ФБД и ФГШ, построенные при значениях показателя Херста $H = 0.3, 0.5, 0.8$.

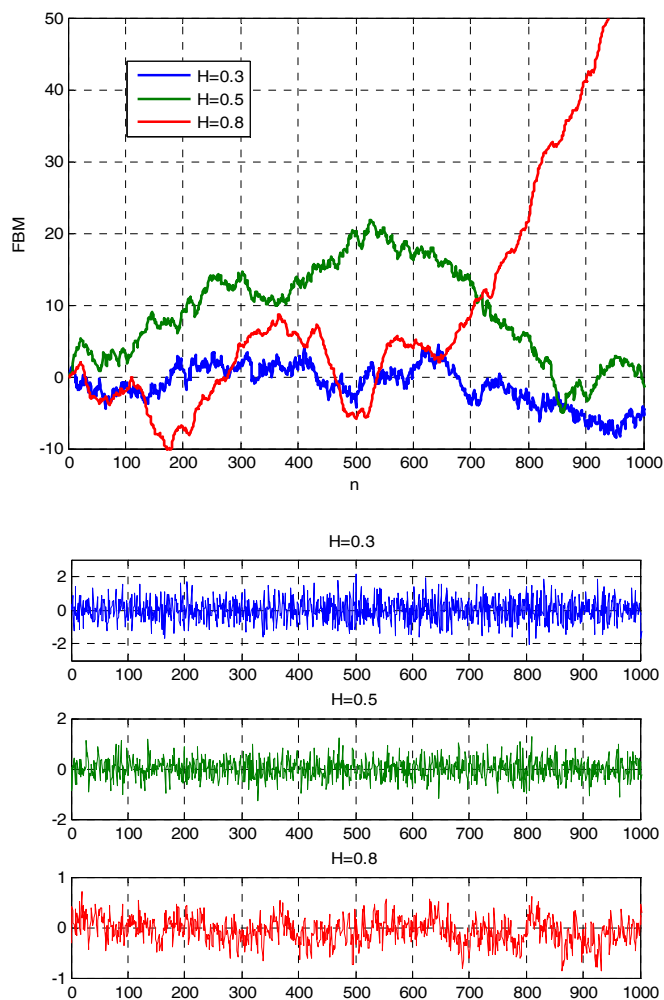


Рисунок 1.1 – Реализации ФБД (вверху) и ФГШ (внизу) для разных значений H

1.3.2 Модели, основанные на α -устойчивых распределениях

Случайная величина X называется α -устойчивой, если для любых двух положительных чисел a, b найдутся положительные числа c, d такие, что

$$\text{Law}(aX_1 + bX_2) = \text{Law}(cX + d), \quad (1.22)$$

где $\text{Law}(\cdot)$ обозначает закон распределения, X_1 и X_2 – независимые случайные величины; $\text{Law}(X_1) = \text{Law}(X_2) = \text{Law}(X)$.

Если выполняется (1.22), то существует такое $\alpha \in (0, 2]$, не зависящее от a и b , что для величины c в (1.22) выполняется равенство $c^\alpha = a^\alpha + b^\alpha$.

В общем случае, для α -устойчивых распределений в явном виде может быть записана только характеристическая функция $\varphi(t) = M[e^{itX}]$. Характеристическая функция устойчивой случайной величины $\ln \varphi(t)$ с параметрами $0 < \alpha \leq 2$, $\sigma \geq 0$, $-1 \leq \beta \leq 1$ и $\mu \in R$ имеет вид:

$$\ln \varphi(t) = \begin{cases} -\sigma^\alpha |t|^\alpha (1 - i\beta \text{sign}(t) \tan \frac{\pi\alpha}{2}) + i\mu t, & \alpha \neq 1, \\ -\sigma |t| (1 + i\beta \text{sign}(t) \frac{2}{\pi} \ln |t|) + i\mu t, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Параметр α называется индексом устойчивости или характеристическим показателем и определяет, насколько выражен тяжелый хвост распределения. При $0 < \alpha < 2$ случайные величины имеют бесконечную дисперсию, а при $0 < \alpha \leq 1$ еще и обладают бесконечным средним. Параметр смещения β задает степень асимметричности распределения, при $\beta = 0$ распределение симметрично. Величина σ (масштабный параметр) выражает степень разброса значений относительно среднего значения, а μ при $\alpha > 1$ равно математическому ожиданию X . [Ворак, 2005]

Стохастический процесс $X(t)$ является α -устойчивым ординарным движением Леви, если он обладает стационарными независимыми α -

устойчивыми приращениями. Такой процесс является самоподобным с параметром $H = 1/\alpha$.

$$\text{Law}\{X(at)\} = a^{\frac{1}{\alpha}} \text{Law}\{X(t)\}. \quad (1.23)$$

Он используется в моделировании и исследовании стохастических процессов по двум причинам. Первой причиной является то, что движение Леви является обобщением ординарного броуновского движения. Математическое обоснование такого обобщения выходит в использовании главных свойств устойчивых законов вероятности. С точки зрения предельной теоремы, устойчивые распределения является естественным обобщением широко известных гауссовских распределений. Вторая причина важности движения Леви кроется в его свойствах масштабной инвариантности, то есть самоподобия. Более того приросты не только самоподобные, а еще имеют распределения с большими хвостами.

В работе [Соболев, 2012] рассмотрено моделирование реальных временных рядов на основе движения Леви. В основу моделирования положен алгоритм, предложенный в работе [Chamber, 1976]. Более поздние модификации алгоритма приведены в [Mittnik, 1999].

Алгоритм стартует от моделирования двух выборок случайных величин:

одной (γ_i) - равномерно распределенной на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и второй

(W_i) – независимой от нее простейшей экспоненциально распределенной.

Для случая $\alpha \neq 1$ рассчитывается величина:

$$X_i = S_{\alpha,\beta} \frac{\sin(\alpha(\gamma_i + B_{\alpha,\beta}))}{(\cos \gamma_i)^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{\cos(\gamma_i - \alpha(\gamma_i + B_{\alpha,\beta}))}{W_i} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}, \quad (1.24)$$

$$\text{где } S_{\alpha,\beta} = \left(1 + \beta^2 \tan^2\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)^{\frac{1}{2\alpha}}, \quad B_{\alpha,\beta} = \frac{\arctan(\beta \tan \frac{\pi\alpha}{2})}{\alpha}.$$

Для случая $\alpha = 1$ формула (1.24) сводится к выражению

$$X_i = \frac{2}{\pi} \left(\left(\frac{\pi}{2} + \beta\gamma_i \right) \tan \gamma_i - \beta \ln \left(\frac{\frac{\pi}{2} W_i \cos \gamma_i}{\frac{\pi}{2} + \beta\gamma_i} \right) \right). \quad (1.25)$$

Формулы (1.24-1.25) моделируют значения стандартных устойчивых случайных величин $S_\alpha(1,0,0)$, однако легко перейти к общему случаю $S_\alpha(\sigma,\beta,\mu)$, используя соотношение

$$Y_i = \begin{cases} \sigma X_i + \mu, & \alpha \neq 1 \\ \sigma X_i + \frac{2}{\pi} \beta \sigma \ln \sigma + \mu, & \alpha = 1 \end{cases}.$$

На рис.1.2 приведены модельные временные реализации и соответствующие плотности распределений симметричных α -устойчивых случайных величин $S_\alpha(1,0,0)$ для значений параметра $\alpha=0.8,1.2,1.8$.

1.3.3 Каскадные модели мультифрактальных процессов

Основными математическими моделями мультифрактальных процессов являются каскадные процессы [Feder, 1988; Riedy, 2002]. Мультипликативные каскады первоначально были введены А.Н. Колмогоровым для описания нерегулярного распределения скорости диссипации энергии турбулентного потока. Дальнейшее интенсивное изучение и развитие каскадных моделей было вызвано работами Б. Мандельброта [Mandelbrot, 1974; Calvet, 1997].

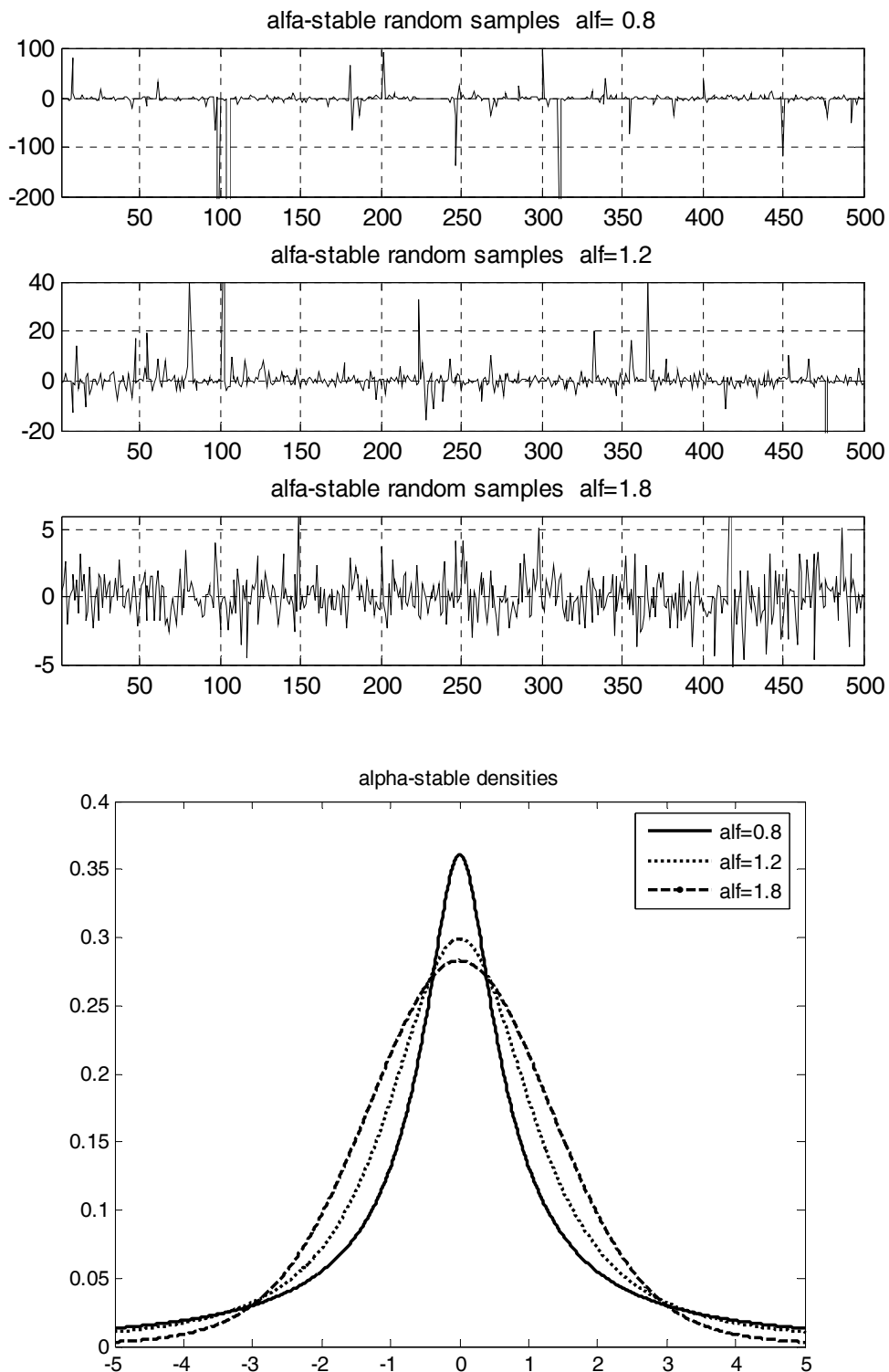


Рисунок 1.2 – Модельные реализации и плотности распределений для $S_\alpha(1,0,0)$

Детерминированные каскады

Простейшей моделью мультифрактального процесса с заданными свойствами является детерминированный биномиальный мультипликативный каскад [Feder, 1988; Riedy, 2002; Kantelhardt, 2008]. При его построении первоначальный единичный отрезок $[0,1]$ с мерой $\mu_0 = 1$ делится на два равных интервала $[0, 1/2]$ и $[1/2, 1]$, которым приписываются весовые коэффициенты p_1 и $p_2 = 1 - p_1$ соответственно, т.е. на 1-м шаге мы получаем следующие меры подинтервалов: $\mu_1[0, 1/2] = p_1$ и $\mu_1[1/2, 1] = 1 - p_1$. Затем с каждым из полученных подинтервалов прделывается аналогичная процедура. В результате на втором шаге имеется 4 подинтервала с соответствующими мерами $\mu_2[0, 1/4] = p_1 p_1$, $\mu_2[1/4, 1/2] = p_1 p_2$, $\mu_2[1/2, 3/4] = p_2 p_1$, $\mu_2[3/4, 1] = p_2 p_2$.

На n -м шаге подинтервал $[t_j, t_j + 2^{-n}]$, где $t_j = 0, 2^{-n}, \dots, 1 - 2^{-n}$ имеет меру $\mu_n[t_j, t_j + 2^{-n}] = p_1^{n \cdot \varphi_0} p_2^{n \cdot \varphi_1}$, где φ_0 - доля 0 в двоичном представлении t , φ_1 - доля единиц в двоичном представлении t . При числе шагов $n \rightarrow \infty$ и $p_1 \neq p_2$ мы приходим к предельной мере, являющейся неоднородным фрактальным множеством. На каждом n -м шаге мера всего первоначального отрезка остается неизменной

$$\sum_j \mu_n[t_j, t_j + 2^{-n}] = 1. \text{ Такие каскады называются консервативными.}$$

На рисунке 1.3 слева представлены теоретические скейлинговые экспоненты $\tau(q)$ для значений $p_1 = \{0.6, 0.7, 0.8, 0.9\}$, а справа показаны реализации биномиального каскада при значениях $p_1 = 0.6$ (вверху) и $p_1 = 0.8$ (внизу). Число итераций $n = 10$, т.е. длина реализации равна 2^{10} значений. Очевидно, что с увеличением первоначального весового коэффициента p_1 увеличивается неоднородность временного ряда.

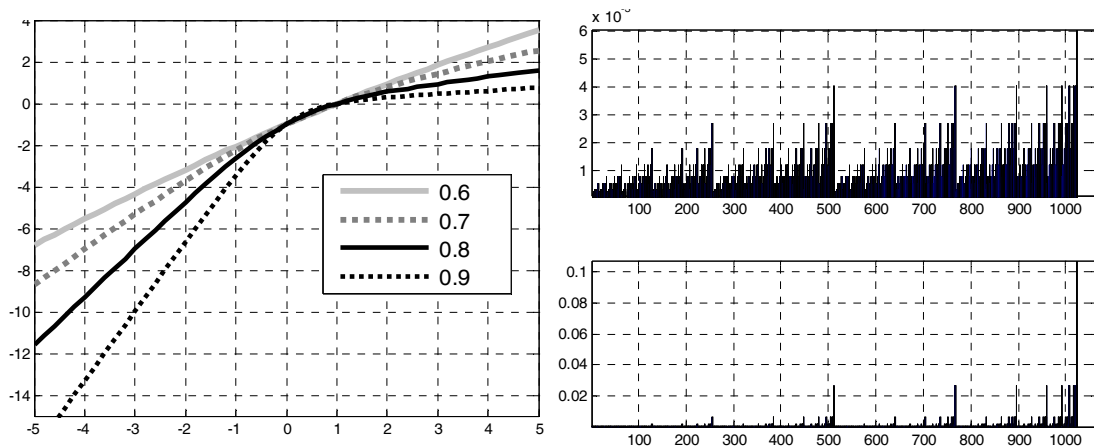


Рисунок 1.3 – Скейлинговые экспоненты и реализации детерминированного биномиального каскада

Стохастические каскады

Свойства детерминированного каскада полностью определяются величиной p_1 . При построении стохастических каскадов весовыми коэффициентами являются независимые значения некоторой заданной случайной величины W [Riedy, 2002]. В этом случае на n -м шаге подинтервал длины 2^{-n} можно обозначить как $I(k_1 \dots k_n)$, где $k_1 \dots k_n$ – последовательность 0 и 1 будет обладать мерой

$$\mu_n(I(k_1 \dots k_n)) = 2^{-n} \prod_{i=1}^n W(k_1 \dots k_i) = 2^{-n} \text{Exp} \left\{ \sum_{i=1}^n w(k_1 \dots k_i) \right\}, \quad (1.26)$$

где все $W(k_1 \dots k_i) = \text{Exp}\{w(k_1 \dots k_i)\}$ являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, такими что $M[W] = 1$. Доказано, что такая процедура сходится почти наверное к стохастической мультифрактальной мере при условии

$$M[W \cdot \ln W] < 1. \quad (1.27)$$

Важным свойством мультипликативных каскадов является их свойство самоподобия:

$$\mu(I(k_1 \dots k_n)) \doteq 2^{-1} W \mu(I(k_1 \dots k_{n-1})). \quad (1.28)$$

Из (1.26) и (1.28) следует скейлинговое соотношение

$$M\left[\mu(0, 2^{-n})^q\right] = 2^{-nq} M[W^q]^n M\left[\mu(0, 1)^q\right].$$

которое позволяет определить скейлинговую экспоненту $\tau(q)$.

Чтобы вычислить скейлинговую экспоненту $\tau(q)$, делаются следующие упрощающие предположения [Molchan, 1996; Riedi, 2002]:

- вместо предельной меры μ_∞ рассматривается мера μ_n на n -ом шаге;
- при вычислениях предполагается, что процесс обладает эргодическими свойствами и пространственное среднее величин μ_n^q заменяется средним по реализациям.

При сделанных допущениях

$$\tau(q) = -\log_2 M[W^q] + q - 1. \quad (1.29)$$

Для существования нетривиальной предельной меры μ_∞ требуется выполнение условия $\tau'(1) > 0$, что совпадает с (1.27).

При построении стохастических каскадов весовыми коэффициентами являются независимые значения некоторой заданной случайной величины W . Случайная величина выбирается таким образом, чтобы математическое ожидание суммы весовых коэффициентов на каждой итерации равнялось единице. Если выбрать случайную величину, определенную на интервале $[0,1]$, то сумма коэффициентов на каждой итерации будет равной единице.

В этом случае первым двум интервалам будут приписаны весовые коэффициенты w_1 и $1 - w_1$ соответственно. На втором шаге добавляются два новых независимых случайных значения w_2 и w_3 . Получится 4 интервала с весовыми коэффициентами $w_1 w_2$, $w_1(1 - w_2)$, $(1 - w_1)w_3$ и $(1 - w_1)(1 - w_3)$. При $n \rightarrow \infty$ мы приходим к предельной мере, являющейся неоднородным фрактальным множеством.

В работе [Kirichenko, 2012] в качестве случайной величины, порождающей весовые коэффициенты рассмотрена случайная величина, имеющую бета-распределение. Бета-распределением с параметрами $a > 0$, $b > 0$, называется распределение с плотностью вероятностей

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(a,b)} (1-x)^{b-1}, & x \in (0,1), \\ 0, & x \notin (0,1) \end{cases},$$

где $B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$ – бета-функция.

Для бета-распределения с одинаковыми значениями параметров $a = b$, у которого функция плотности распределения симметрична, можно аналитически определить скейлинговую экспоненту $\tau(q)$ [Riedy, 2002]:

$$\tau(q) = -\log_2 \frac{\text{Beta}(\alpha+q, \alpha)}{\text{Beta}(\alpha, \alpha)} - 1. \quad (1.30)$$

На рис. 1.4 (а) приведены различные виды графиков плотности распределения вероятностей, для симметричного бета-распределения при значениях $a = \{0.5, 1, 1.5, 3\}$. При значениях параметров $a = b = 1$ мы получаем случайную величину, имеющую равномерное распределение на интервале $[0, 1]$. На рис. 1.4 (б) представлены графики скейлинговых экспонент для соответствующих значений параметра a симметричного бета-распределения.

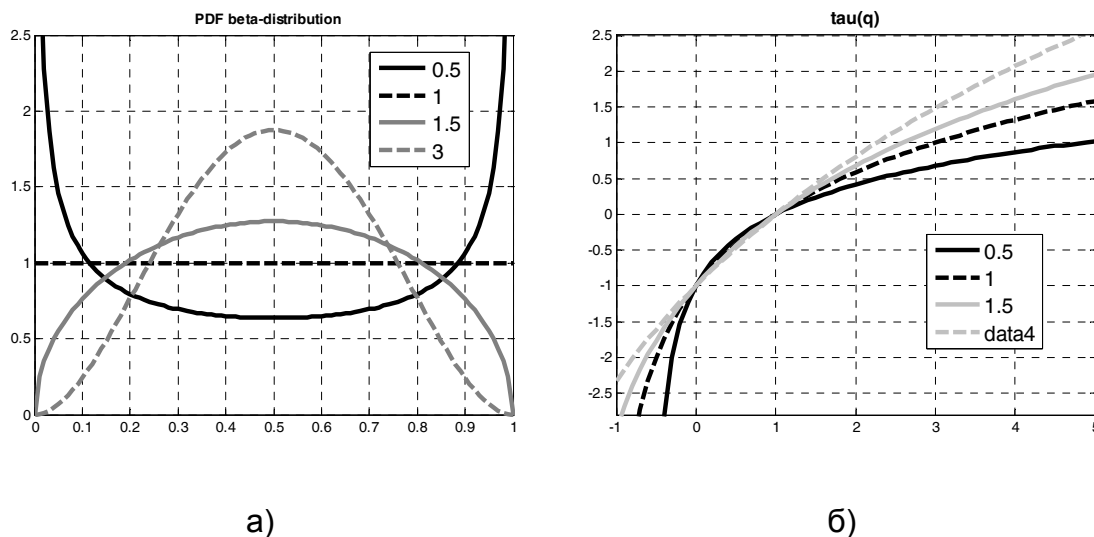


Рисунок 1.4 – Плотности распределения (а) и скейлинговые экспоненты $\tau(q)$ для разных значений параметра a симметричного бета-распределения

Очевидно, что с увеличением значения параметра a происходит ослабление мультифрактальных свойств временного ряда. На рис. 1.5 показаны соответствующие реализации биномиальных каскадов.

В случае симметричного бета-распределения мультифрактальные свойства каскада полностью определяются параметром a . Показатель Херста H , учитывая формулу (1.15), в этом случае равен

$$H = \frac{\tau(2) + 1}{2} = -\log_2 \frac{\text{Beta}(\alpha+q, \alpha)}{2 \text{Beta}(\alpha, \alpha)} .$$

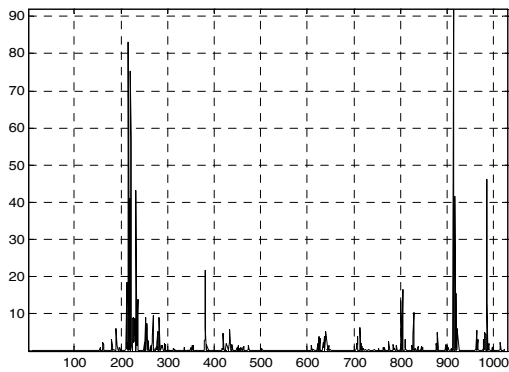
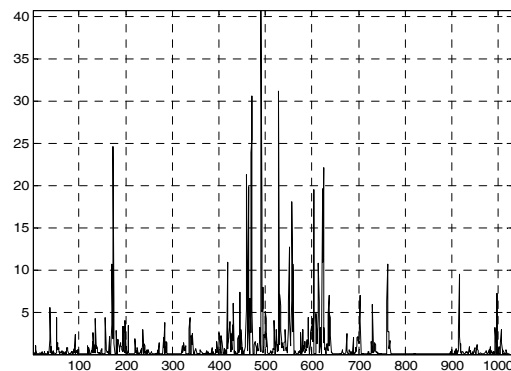
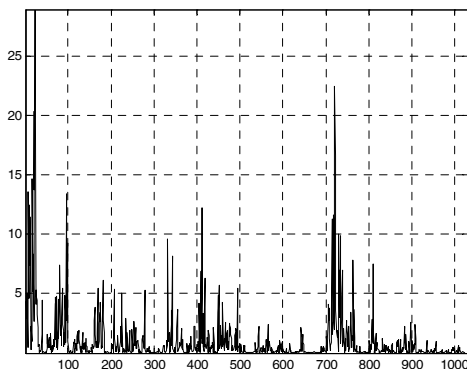
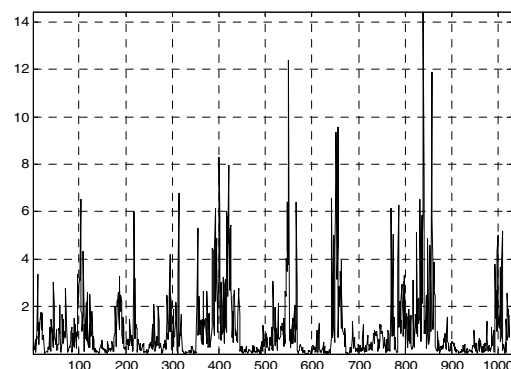
а) $a = 0.5$ б) $a = 1$ в) $a = 1.5$ г) $a = 3$

Рисунок 1.5 – Реализации биномиального каскада для разных значений a

Выводы

1. Многие информационные, биологические, физические, технологические процессы обладают сложной фрактальной структурой. Процессы, обладающие фрактальными свойствами, можно разделить на две группы: самоподобные (монофрактальные) и мультифрактальные. Монофрактальные процессы обладают одним показателем скейлинга – параметром Херста. Мультифрактальные процессы характеризуются спектром скейлинговых показателей, который обычно представлен скейлинговой экспонентой или функцией мультифрактального спектра, связанных между собой преобразованиями Лежандра.

2. Методы оценивания фрактальных характеристик находят все большее практическое применение при анализе случайных процессов, разработке математических моделей и проведении имитационного моделирования в самых разнообразных областях науки, техники, медицины. При оценивании показателя Херста наиболее популярными являются методы нормированного размаха, изменения дисперсии, флуктуационного анализа. При оценивании мультифрактальных характеристик наиболее востребованными являются методы мультифрактального детрендрованного флуктуационного анализа и максимумов модулей непрерывного вейвлет-преобразования.

3. Наиболее адекватным математическим аппаратом для исследования динамики и структуры стохастических фрактальных процессов является вейвлет-анализ. Модификация и дальнейшее развитие вейвлет-фрактальных методов являются важнейшими задачами обработки реализации самоподобных и мультифрактальных процессов.

4. Популярными и не сложными в реализации математическими моделями самоподобных и мультифрактальных процессов являются фрактальное

броуновское движение, ординарное движение Леви и стохастические биномиальные мультипликативные каскады.

Литература

- [Abry, 2009] Abry, P., Goncalves, P., Vehe J.L. Scaling, Fractals and Wavelets. London : John Wiley & Sons, 2009. – 464 p.
- [Borak, 2005] Borak, S., Hardle, W., Weron, R.. Stable distributions. In Statistical tools for finance and insurance. Berlin: Springer, 2005. pp. 21-44.
- [Calvet, 1997] Calvet, L., Fisher, A., Mandelbrot, B. Large deviation and the distribution of price changes. Cowles Foundation Discussion Paper, Yale: University, №1165, 1997. pp. 1–28.
- [Chamber, 1976] Chambers, J.M., Mallows, C.L., Stuck, B.W. A method for simulating stable random variables, Journal of the American Statistical Association, Vol. 71, 1976. pp.340-344.
- [Feder, 1988] Feder, J. Fractals. Plenum, New York, 1988.
- [Jeongy, 1998] Jeongy, H.-D. J., McNickle, D., Pawlikowski, K. A Comparative Study of Generators of Synthetic Self-Similar Teletraffic. Department of Computer Science and Management, University of Canterbury, 1998.
- [Kantelhardt, 2002] Kantelhardt, J.W., Zschiegner, S.A., Bunde, A., Havlin, S., Koscielny-Bunde, E., Stanley, H.E. Multifractal detrended fluctuation analysis of non-stationary time series. Physica A., vol. 316, 2002. pp. 87–114.
- [Kantelhardt, 2008] Kantelhardt J. W. Fractal and Multifractal Time Series. [Электронный ресурс]: 2008.– Режим доступа: <http://arxiv.org/abs/0804.0747>.
- [Kirichenko, 2012]. Kirichenko, L., Radivilova, T., Kayali, E. Modeling telecommunications traffic using the stochastic multifractal cascade process Problems of Computer Intellectualization. Kiev–Sofia: ITHEA, 2012. pp. 55–63.

- [Leland, 1993] Leland, W.E., Taqqu, M. S., Willinger, W., Wilson, D. V. Statistical analysis of high time-resolution Ethernet LAN traffic measurements. *Computing Science and Statistics*, vol. 25, 1993. pp. 146–155.
- [Mandelbrot, 1968] Mandelbrot, B., Van Ness J.W. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Review*, Vol. 10, №4, 1968. pp. 422–437.
- [Mandelbrot, 1974] Mandelbrot, B. Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier. *Mathematical Sciences Department, IBM Thomas J. Watson Research Center, Yorktown Heights, 1974.*
- [Mandelbrot, 1983] Mandelbrot, B., Freeman, W. H. *The Fractal Geometry of Nature*. San Francisco, 1983.
- [Mandelbrot, 2001] Mandelbrot, B. Scaling in financial prices: II. Multifractals and the star equation. *Quantitative Finance*, Vol. 1, 2001. pp. 124–130.
- [Meyer, 1995] Meyer, Y., Sellan, F., Taqqu, M. S. Wavelets, generalized white noise and fractional integration: the synthesis of fractional Brownian motion. *The Journal of Fourier Analysis and Applications*, Vol. 5, №5, 1995. pp. 465–494.
- [Mittnik, 1999] Mittnik, S., Doganoglu, T., and Chenyao, D. Computing the probability density function of the stable Paretian distribution, *Mathematical and Computer Modelling*, Vol. 29, 1999. pp.235-240
- [Molchan, 1996] Molchan, G. M. Scaling Exponents and Multifractal Dimensions for Independent Random Cascades. *Commun. Math. Phys.*, Vol.179, 1996. pp.681–702.
- [Riedi, 2002] Riedi, Rudolf H. Multifractal processes, in Doukhan P., Oppenheim G., Taqqu M.S. (Eds.), *Long Range Dependence: Theory and Applications*, 2002. pp. 625–715.

- [Sellan, 1995] Sellan, F. Synthèse de mouvements browniens fractionnaires à l'aide de la transformation par ondelettes. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Série I, Vol. 321, 1995. pp.351–358.
- [Taqqu, 1995] Taqqu, M.S., Teverovsky, V., Willinger, W. Estimators for long-range dependence: an empirical study. Fractals, № 3(4), 1995. pp. 785–798.
- [Taqqu, 1997] Taqqu, M., Willinger, M., Sherman, R. Proof of a Fundamental Result in Self-Similar Traffic Modeling. IEEE/ACM Transactions on Networking, № 5(2), 1997.
- [Willinger, 1997] Willinger W., Taqqu M. S., Sherman, R., and Wilson, D.V. Self-Similarity through high-variability: statistical analysis of ethernet LAN traffic at the source level. IEEE/ACM Transactions on Networking, № 5(1), 1997. pp. 43–62.
- [Божокин, 2001] Божокин, С.В., Паршин, Д.А. Фракталы и мультифракталы. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
- [Кириченко, 2009] Кириченко, Л.О., Дейнеко, Ж.В. Оценивание самоподобия стохастического временного ряда методом вейвлет-анализа. Радіоелектронні і комп'ютерні системи, № 4 (38), 2009. сс. 99–105.
- [Кроновер, 2000] Кроновер, Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории, М.: Постмаркет, 2000. 352 с.
- [Соболев, 2012] Соболев, В.І., Кіриченко, Л.О., Мережкін, Д.Г. Моделювання часових рядів за допомогою α -стійкого процесу Леві. Відбір і обробка інформації, №37 (113), 2012. сс.19-25.
- [Шелухин, 2008] Шелухин, О.И., Осин, А.В., Смольский, С.М. Самоподобие и фракталы. Телекоммуникационные приложения, М. : Физматлит, 2008. 368 с.

Информация об авторах



Людмила Кириченко – д.т.н., профессор Харьковского национального университета радиоэлектроники; пр. Науки 14, 61166, Харьков, Украина; e-mail: lyudmyla.kirichenko@nure.ua.

Основные области научных исследований: самоподобные и мультифрактальные временные ряды, фрактальный анализ, вейвлет-анализ, детерминированные хаотические системы.



Тамара Радивилова – к.т.н., доцент Харьковского национального университета радиоэлектроники; пр. Науки 14, 61166, Харьков, Украина; e-mail: tamara.radivilova@gmail.com.

Основные области научных исследований: самоподобные и мультифрактальные временные ряды, телекоммуникационные системы, управление трафиком, информационная безопасность.