Krassimir Markov, Vitalii Velychko, Oleksy Voloshin
(editors)

Information Models
of
Knowledge

I T H E A®
KIEV – SOFIA
2010

Krassimir Markov, Vitalii Velychko, Oleksy Voloshin (ed.)
Information Models of Knowledge
ITHEA®
Kiev, Ukraine – Sofia, Bulgaria, 2010
ISBN 978-954-16-0048-1

First edition

Recommended for publication by The Scientific Concil of the Institute of Information Theories and Applications FOI ITHEA
ITHEA IBS ISC: 19.

This book maintains articles on actual problems of research and application of information technologies, especially the new approaches, models, algorithms and methods fot information modeling of knowledge in: Intelligence metasynthesis and knowledge processing in intelligent systems; Formalisms and methods of knowledge representation; Connectionism and neural nets; System analysis and sintesis; Modelling of the complex artificial systems; Image Processing and Computer Vision; Computer virtual reality; Virtual laboratories for computer-aided design; Decision support systems; Information models of knowledge of and for education; Open social info-educational platforms; Web-based educational information systems; Semantic Web Technologies; Mathematical foundations for information modeling of knowledge; Discrete mathematics; Mathematical methods for research of complex systems.

It is represented that book articles will be interesting for experts in the field of information technologies as well as for practical users.

General Sponsor: Consortium FOI Bulgaria (www.foibg.com).

Printed in Ukraine

ISBN 978-954-16-0048-1

C\o Jusautor, Sofia, 2010

МУЛЬТИМНОЖЕСТВА – АЛЬТЕРНАТИВА ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННОЙ ПЛАТФОРМЫ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОСНОВАНИЯХ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Дмитрий Буй, Юлия Богатырёва

***Аннотация**: Основной тезис работы: мультимножества (совокупности с повторениями) могут рассматриваться в качестве альтернативы теоретико-множественной платформы в математических основаниях информационных технологий. В статье в систематизированном виде приводится обзор существующей литературы по теории и применению мультимножеств, рассматривается использование мультимножеств в ДНК-вычислениях. Введены основные определения, касающиеся теории мультимножеств. Построен содержательный фрагмент математической теории мультимножеств: частично упорядоченные семейства мультимножеств, решетки и полные решетки мультимножеств. Все это служит обоснованием рассмотрения мультимножеств в качестве упомянутой альтернативы.*

***Ключевые слова**: математические основания информационных технологий, мультимножество, ДНК-вычисления, решетка мультимножеств, полная решетка мультимножеств.*

***ACM Classification Keywords**: F.4.1 Mathematical Logic, G.2.1 Combinatorics, H.2.4 Systems – Relational databases.*

Введение

Возрастающие требования к информационным технологиям могут быть удовлетворены только созданием адекватных логико-математических основ; это, в свою очередь, приводит к пересмотру классической канторовской теоретико-множественной платформы современной математики. В статье в качестве альтернативы предлагается мультимножественная платформа.

Содержательно говоря, мультимножества – это совокупности с повторениями. Понятие мультимножества появилось относительно недавно, хотя в практических задачах мультимножества использовались довольно часто.

В 60-х годах известный специалист в области информатики Д.Кнут поставил вопрос об отсутствие адекватной терминологии и обозначений для такой глобальной концепции как мультимножество. Впервые термин “мультимножество” (multiset, bag) был предложен Н.Г. де Брейном (N. G. de Bruijn) в приватной корреспонденции с Д. Кнутом. В 70-х годах этот термин широко распространился и сейчас является стандартным термином.

Мультимножества удобно использовать в качестве модели для представления и исследования объектов, особенностью которых является, во-первых, множественность и, во-вторых, повторяемость данных.

Широкое применении мультимножеств при решении теоретико-прикладных задач, в частности, задач информатики (табличные базы данных, теория принятия решений, теория информации и кодирования) вызывает необходимость расширения и уточнения соответствующих аспектов теории мультимножеств.

В статье приводится обзор всей доступной современной библиографии по мультимножествам (28 источников), строится фрагмент содержательной математической теории мультимножеств (исследование структуры семейства мультимножеств с естественным упорядочением, в частности, построение решетки мультимножеств и ее вложений в полные решетки).

Библиография мультимножеств

Всю библиографию, посвященную мультимножествам, можно условно разделить на такие категории: работы, касающееся абстрактной теории мультимножеств, обзорные работы, работы касающееся использования мультимножеств. Кроме того отделим работы по применению теории мультимножеств именно в табличных базах данных. Следовательно, имеем 4 раздела, которые представлены ниже.

I. АБСТРАКТНАЯ ТЕОРИЯ МУЛЬТИМНОЖЕСТВ

1. [Albert, 1991]. Автор дает формальное определение мультимножества и операциям над ними; приводит алгебраические свойства мультимножеств.

2. [Кнут, 2000]. Автор дает содержательное определения понятию мультимножества; определяет операции объединения, пересечения и суммы мультимножеств.

3. [Syropoulos, 2001]. Работа состоит из нескольких частей и подытоживает все то, что связано с теорией мультимножеств по состоянию на 2001 год. Сначала автор дает определение мультимножеству, вводит операции сложения, объединения и пересечения мультимножеств, а также понятия мощности и включения мультимножеств. Далее рассматриваются гибридные множества, нечеткие и частично упорядоченные мультимножества, а также приводится категориальная модель мультимножеств.

4. [Петровский, 2002], [Петровский, 2003] В первой монографии автор вводит основные определения теории мультимножеств: мультимножество, характеристическая функция, операции над мультимножествами. Кроме того, он рассматривает свойства основных операций над мультимножествами, методы графического представления мультимножеств и дает краткий обзор применения мультимножеств в различных областях. Во второй монографии автор рассматривает метрические пространства множеств и мультимножеств, описывает новые виды метрик.

II. ОБЗОРНЫЕ СТАТЬИ

5. [Blizard, 1989]. Автор дает развернутый обзор теории мультимножеств по состоянию на 1989 год. Работа состоит из двух частей: теория мультимножеств и ее применение. В первой части работы, начиная от Кантора и его определения понятие множества, автор приводит разнообразные определения понятия мультимножества разных авторов. Во второй части работы мультимножества рассматриваются в первую очередь как объекты некоторых практических задач.

6. [Singh, 2007]. В работе рассматриваются разнообразные представления мультимножеств (в мультипликативной, линейной формах, в виде последовательности, как семейство множеств, в виде числовой последовательности). Определяются операции над мультимножествами и рассматриваются некоторые их свойства, а также дается краткий обзор применений мультимножеств в математике, компьютерные науках и других сферах.

III. МУЛЬТИМНОЖЕСТВА В ТАБЛИЧНЫХ БАЗАХ ДАННЫХ

7. [Libkin, 1993], [Libkin, 1997]. В первой работе авторы рассматривают теоретические вопросы, касающиеся реляционных баз данных, основой которых выступают мультимножества. Они строят язык запросов BQL (Bag Query Language) и исследуют связь между полученным языком и так называемой вложенной реляционной алгеброй (nested relation algebra). Вторая работа посвящена выразительной силе языка запросов для мультимножеств, а также использованию некоторых конструкций для мультимножеств, множеств и списков.

8. [Буй, Поляков, 1999]. В работе задана композиционная семантика таблиц с дубликатами строк и таблиц, “упорядоченных” конструкцией ORDER BY.

9. [Редько, 2001]. Монография посвящена табличным алгебрам и SQL-подобным языкам. В ней дается формальное определение мультимножества, характеристической функции, а также определяются операции над мультимножествами: объединение, пересечение, разности (вычитания), декартового соединения, фильтрации, полного образа, агрегатные функции.

10. [Lamperti, 2001]. Статья посвящена расширению возможностей баз данных за счет использования мультимножеств. Авторы отмечают, что современные коммерческие реляционные базы данных предоставляют возможность осуществлять мультимножественно-ориентированные манипуляции над таблицами, даже если базы данных основаны на формальной множественно-ориентированной модели.

11. [Кузнецов]. Рассматривается существование такого структурного типа как мультимножество (BAG) в декларативном языке ограничений OCL. Это тип является разновидностью коллекций и имеет соответствующие операции.

12. [SQL:2003]. Начиная со стандарта SQL:2003 в язык SQL был введен конструктор типа MULTISET. Значения мультимножеств задаются использованием специальной конструкции multiset value constructor. Кроме этого для мультимножеств введены операции объединения, пересечения и разности (multiset union, multiset intersect, multiset except), а также новые агрегатные функции (collect, fusion, intersect).

13. [Ross, 2004]. Авторы представляют симметрическую связь между *k*-арными сущностями базы данных как мультимножество мощности *k*, где *k* – натуральное число. В статье обосновывается необходимость поддержки базами данных мультимножеств, ограниченных по мощности (cardinality-bounded multisets), которые естественным образом возникают при решении реальных задач. Также предлагаются методы реализации. Описан синтаксис расширения SQL, что дает возможность формулировать запросы над такими симметричными связями.

14. [Гарсиа-Молина, 2004]. Дается определение мультимножества в терминах табличных баз данных. Также над мультимножествами вводятся основные (объединение, пересечение, разность, проекция, выбор из мультимножества или селекция, декартовое сложение) и дополнительные (агрегирования, сортировки, группировки) операции.

IV. ДРУГИЕ ПРИМЕНЕНИЯ МУЛЬТИМНОЖЕСТВ

15. [Барендрегт, 1985]. При рассмотрении сильно эквивалентных редукций теории λ-исчислений вводятся мультимножества, основами которых выступают множества натуральных чисел, для таких мультимножеств вводятся ординалы.

16. [Knuth, 1992]. В своей работе автор определяет мультиязык как мультимножество строк и строит контекстно-свободный мультиязык.

17. [Lloyd, 1998-1], [Lloyd, 1998-2]. Автор предлагает новый способ поддержки мультимножеств в декларативном языке программирования Escher. Вводит стандартное определение мультимножества, определяет мультимножество стандартными средствами. Реализует операции сложения, объединения, пересечения и разности над мультимножествами, вспомогательные функции для работы с ними.

18. [Башкин, 2005], [Сети Петри, 2000]. Мультимножества используются для определения основных понятий сетей Петри.

19. [Сухольский, 2004]. Методы психологи используют мультимножества.

20. [Bonchis, 2005]. Статья посвящена представлению и кодированию информации в терминах теории мультимножеств. Информационный ресурс порождает мультимножественные сообщения. Исследуется норма энтропии мультимножественного информационного ресурса.

21. [Малинец, 2005]. Мультимножества используются в такой новой области знаний как вычисления на ДНК – разделе так называемых молекулярных вычислений (нового междисциплинарного направления на границе молекулярной биологии и компьютерных наук).

22. [Славин, 2006]. Мультимножества применяются в задачах распознавания символов. Разнообразные, с точки зрения изображения, типы символов могут содержать несколько графем, т.е. типов изображений, которые отвечают одному символу. Алфавит обучения как множество классов является носителем мультимножества всех допустимых графем. Кратность элемента этого множества есть количество графем, неразличимых с точки зрения алфавита обучения.

Построение формальной модель ДНК-вычислений

Применение мультимножеств в ДНК-вычислениях рассмотрим более детально.

ДНК-вычисления – это форма вычислений, использующая ДНК, биохимию и молекулярную биологию вместо традиционных компьютерных технологий, основанных на кремнии [DNA]. Соответственно, ДНК-компьютер – вычислительная система, использующая вычислительные возможности молекул ДНК. Развитие этой предметной области началось в 1994 году работой Леонарда Адлемана (Leonard Adleman), в которой показано как с помощью пробирки, содержащей ДНК, можно весьма эффектно решить классическую так называемую задачу коммивояжера. Также известны работы, например, Эуда Шапиро (Ehud Shapiro) по реализации конечных автоматов, Эрика Винфри (Erik Winfree) по синтезу различных поверхностей (в частности, известной фрактальной структуры – ковра Серпинского) [Малинец, 2005].

Молекулу ДНК формально представим в виде пары слов в четырехбуквенном алфавите $\aleph = \{A, T, Ц, Г\}$, каждый символ которого обозначает соответственно основания нуклеотидов – аденин, тимин, цитозин и гуанин: $(\xi_1,...,\xi_n,\eta_1,...,\eta_n)$, где $\xi_1,...,\xi_n \in \aleph$, $\eta_1,...,\eta_n \in \aleph$. Если комплементарность уточнить в виде биекции $\psi : \aleph \to \aleph$, $\psi(A) = T$, $\psi(T) = A$, $\psi(Ц) = Г$, $\psi(Г) = Ц$, то тогда должно выполняться $\psi(\xi_i) = \eta_i$ для всех $i = 1,..,n$. Таким образом, второе слово пары однозначно восстанавливается по первому слову, и вычисления на ДНК уточняются как вычисления над словами в указанном алфавите.

Формальная модель такой словарной вычислимости была построена в работе [Буй, Редько, 1984] в терминах так называемых примитивных программных алгебр (ППА).

Рассмотрим более сложный случай, когда, во-первых, цепочки ДНК имеют, вообще говоря, разную длину, и, во-вторых, учитывается “сдвиг” одной цепочки относительно другой (сдвиги возникают в виду удлинений, дополнений, укорочений, разрезаний, сшивки цепочек): моделью ДНК является тройка вида $(\xi_1,...,\xi_n,\eta_1,...,\eta_m,k)$, где $k \le \min(n,m)$ – количество пар (нуклеотидов), связанных между собой. Формально говоря, должны выполняться утверждения: для всех $i = 1,..,k$ $\xi_i = \psi(\ \eta_i(m-k+1)\ )$ или $\eta_i = \psi(\ \xi_i(n-k+1)\ )$. Первое равенство описывает случай сдвига первой (верхней) цепочки ДНК вправо, а второй – влево. В частном случае при $n = m = k$ получается рассмотренный ранее случай цепочек равных длин без сдвигов. Решение вопроса вычислимой полноты для общего случая в терминах ППА требует отдельного рассмотрения.

Очевидно, что возникает потребность в общих моделях молекулярных вычислений, которые бы позволяли проектировать новые эксперименты и обобщать существующие. Одна из таких моделей – модель параллельной фильтрации (Parallel Filtering Model). Основой такой модели выступает “пробирка”, формальной моделью которой, в свою очередь, является мультимножество слов.

Класс вычислимых функций над мультимножествами задается в виде замыкания семейства простейших функций и предикатов над мультимножествами в ППА. Такое семейство состоит из константной функции, фиксирующей пустое мультимножество, функций сложения и вычитания мультимножеств, функции выбора компоненты мультимножества, предиката равенства мультимножеств и некоторых иных специфических функций над мультимножествами.

Основные определения

Введем формальное определение мультимножества. Мультимножество α с основой U – это функция вида $\alpha : U \to N^+$, где U – некоторое множество (в классическом канторовском понимании), а $N^+ = \{1, 2, ...\}$ – множество натуральных чисел без нуля [Петровский, 2002], [Редько, 2001]. Пусть задано мультимножество α с основой $U_\alpha = dom\,\alpha$. Здесь $dom\,\alpha$ – область определения мультимножества как функции. Характеристической функцией мультимножества α называется функция вида $\chi_\alpha : D \to N$, значение которой задается кусочной схемой

$$\chi_\alpha(d) = \begin{cases} \alpha(d), \textit{ если } d \in dom\alpha, \\ 0, \textit{ иначе} ; \end{cases}$$

для всех $d \in D$, где D – универсум элементов основ мультимножеств [Петровский, 2002], [Редько, 2001]. Очевидно, что по характеристической функции соответствующее мультимножество восстанавливается однозначно и операции над мультимножествами удобно задавать характеристическими функциями.

Введем бинарное отношение включения на мультимножествах: мультимножество β включается в мультимножество α ($\beta \preceq \alpha$), если для их характеристических функций выполняется утверждение $\chi_\beta(d) \le \chi_\alpha(d),\ \forall d \in D$. Непосредственно проверяется, что отношение включения является частичным порядком.

Пусть M – семейство мультимножеств соответствующего универсума D. Рассмотрим частично упорядоченное множество (ч.у.м.) $\langle \mathrm{M}, \preceq \rangle$ с введенным выше порядком включения и ч.у.м. характеристических функций $\langle \{\chi_\alpha \mid \alpha \in M\}, \lhd \rangle$. Порядок $\lhd$ определяется следующим образом: $\chi_\alpha \lhd \chi_\beta \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall d \left(d \in D \Rightarrow \chi_\alpha(d) \le \chi_\beta(d)\right)$. Второе ч.у.м. $\langle \{\chi_\alpha \mid \alpha \in M\}, \lhd \rangle$ является прямым произведением множества натуральных чисел N со стандартным порядком $\le$, т.е. $\{\chi_\alpha \mid \alpha \in M\} = \prod_{d \in D} N$. Нетрудно показать, что эти ч.у.м. изоморфны. Следовательно, структура ч.у.м. $\langle \{\chi_\alpha \mid \alpha \in M\}, \lhd \rangle$ сохраняется на ч.у.м. $\langle \mathrm{M}, \preceq \rangle$. А свойства ч.у.м. $\langle \{\chi_\alpha \mid \alpha \in M\}, \lhd \rangle$ вытекает из свойств ч.у.м. $\langle N, \le \rangle$.

Введем операции объединения и пересечения мультимножеств [Syropoulos, 2001], [Петровский, 2002], [Редько, 2001]. Операция $\bigcup_{All}$ мультимножествам α и β сопоставляет мультимножество $\alpha \bigcup_{All} \beta$, значение характеристической функции которого на произвольном аргументе d задается выражением $\max(\chi_\alpha(d), \chi_\beta(d))$. Операция $\bigcap_{All}$ мультимножествам α и β сопоставляет мультимножество $\alpha \bigcap_{All} \beta$, значение характеристической функции которого на произвольном аргументе d задается выражением $\min(\chi_\alpha(d), \chi_\beta(d))$.

Построение решетки мультимножеств

Рассмотренные выше операции объединения и пересечения мультимножеств имеют стандартные свойства.

Лемма 1. Операции $\bigcup_{All}$ и $\bigcap_{All}$ идемпотентны (т.е. $\alpha \bigcup_{All} \alpha = \alpha$, $\alpha \bigcap_{All} \alpha = \alpha$), коммутативны и ассоциативны.□

Доказательство вытекает из того, что теоретико-числовые операции $\max$, $\min$ имеют те же самые свойства.□

Таким образом, можно рассматривать две коммутативные идемпотентные полугруппы $\langle \mathrm{M}, \bigcup_{All} \rangle$ и $\langle \mathrm{M}, \bigcap_{All} \rangle$, где M – семейство мультимножеств соответствующего универсума D .

Используя результат теории решеток (см. например, [Скорняков, 1986], § 8, с. 151, теорема 1), можно полугруппу по объединению превратить в верхнюю полурешетку, а полугруппу по пересечению – в нижнюю. Частичные порядки верхней и нижней полурешеток задаются соответственно следующими определениями: $\alpha \bar{\leq} \beta \overset{def}{\Leftrightarrow} \alpha \bigcup_{All} \beta = \beta$, $\alpha \bar{\trianglelefteq} \beta \overset{def}{\Leftrightarrow} \alpha \bigcap_{All} \beta = \alpha$, причем $\sup_{\bar{\leq}}\{\alpha, \beta\} = \alpha \bigcup_{All} \beta$, $\inf_{\bar{\trianglelefteq}}\{\alpha, \beta\} = \alpha \bigcap_{All} \beta$. Непосредственно проверятся, что эти порядки совпадают с введенным ранее порядком включения мультимножеств $\preceq$.

Теорема 1. Частично упорядоченное множество $\langle \mathrm{M}, \preceq \rangle$ является решеткой, причем $\sup_{\preceq}\{\alpha, \beta\} = \alpha \bigcup_{All} \beta$, $\inf_{\preceq}\{\alpha, \beta\} = \alpha \bigcap_{All} \beta$.□

Такой способ построения решетки мультимножеств явно не использовал законы поглощения. Покажем, в общем случае, их роль при построении решетки по двум коммутативным идемпотентным полугруппам, сигнатурные операции которых связаны законами поглощения. Рассмотрим две коммутативные идемпотентные полугруппы $\langle A, + \rangle$ и $\langle A, \cdot \rangle$, где A – некоторое абстрактное множество.

Используя хорошо известный результат теории решеток о связи коммутативных идемпотентных полугрупп и полурешеток (полуструктур) [Скорняков, 1986, § 8, с. 151, теорема 1], полугруппу $\langle A, + \rangle$ можно превратить в верхнюю полурешетку, а полугруппу $\langle A, \cdot \rangle$ – в нижнюю. Соответствующие частичные порядки верхней и нижней полурешеток задаются выражениями:

$$a \leq b \Leftrightarrow a + b = b \,,\; a \triangleleft b \Leftrightarrow ab = a \,,$$

причем $\sup_{\leq}\{a, b\} = a + b$, $\inf_{\triangleleft}\{a, b\} = ab$. Заметим, что, согласно стандартным соглашениям [Мальцев, 1970], [Скорняков, 1986], знак “ $\cdot$ ” в выражениях опускается.

Теорема 2 (критерий совпадения порядков верхней и нижней полурешеток). Частичные порядки верхней и нижней полурешеток совпадают тогда и только тогда, когда выполняются законы поглощения.□

Доказательство. Сначала докажем необходимость. Если порядки совпадают, то заданное множество является одновременно и верхней и нижней полурешеткой, а, значит, является решеткой. Для решеток же законы поглощения выполняются [Мальцев, 1970], [Скорняков, 1986].

Докажем достаточность. Для этого нужно показать, что для $\forall\, a, b$ выполняется эквивалентность: $a + b = b \Leftrightarrow ab = a$.

Допустим, что равенство $a + b = b$ выполняется. Тогда $ab = a\,(a + b)$. По закону поглощения $a\,(a + b) = a$, поэтому $ab = a$.

Аналогично сделаем допущение, что $ab = a$. В этом случае $a + b = ab + b$. По закону поглощения $ab + b = b$, значит, $a + b = b$. □

Естественно, этот общий результат применим к построению решетки мультимножеств. Для этого надо убедится в выполнении законов поглощения: $\alpha \cap_{All} (\alpha \cup_{All} \beta) = \alpha$ и $\alpha \cup_{All} (\alpha \cap_{All} \beta) = \alpha$, что делается непосредственно (и, в свою очередь, вытекает из выполнения законов поглощения для теоретико-числовых функций $\max$, $\min$).

Построение полной решетки мультимножеств

Приведем более сильные результаты о структуре введенного частично упорядоченного семейства мультимножеств.

Предложение 1 (структура ч.у.м. мультимножеств). Выполняются следующие утверждения:

1. пустое мультимножество $\varnothing_m$ (его характеристической функцией является константная функция, всюду равная нулю) − наименьший элемент в $\langle \mathrm{M}, \preceq \rangle$; 2. $\inf \mu = \alpha$, для произвольного непустого множества мультимножеств $\mu \subseteq \mathrm{M}$; здесь характеристическая функция мультимножества α задается выражением $\chi_\alpha(d) = \min\limits_{\beta \in \mu} \chi_\beta(d)$(отметим, что инфимум пустого множества мультимножеств не существует, так как в рассматриваемом частично упорядоченном множестве мультимножеств не существует наибольшего элемента); 3. для произвольного множества мультимножеств μ: супремум μ существует $\Leftrightarrow$ μ ограничено сверху; 4. $\sup \mu = \alpha$, где μ − произвольное множество мультимножеств, имеющее точную верхнюю грань, а характеристическая функция мультимножества α задается выражением $\chi_\alpha(d) = \max\limits_{\beta \in \mu} \chi_\beta(d)$.□

Доказательство. Рассмотрим отдельно каждое из сформулированных выше утверждений.

1. Наименьшим элементом ч.у.м. $\langle N, \leq \rangle$ является число 0. Соответственно, наименьшим элементом ч.у.м. характеристических функций $\langle \{\chi_\alpha \mid \alpha \in M\}, \lhd \rangle$ будет функция, всюду равная нулю. Исходя из того, что ч.у.м. $\langle \{\chi_\alpha \mid \alpha \in M\}, \lhd \rangle$ изоморфно ч.у.м. $\langle \mathrm{M}, \preceq \rangle$, получим, что наименьшим элементом второго будет пустое мультимножество $\varnothing_m$. 2. Доказательство второго утверждения вытекает из известной формулы нахождения инфимума множества функций (см., например, [Буй, 2002] или [Бурбаки, 1965]) и того факта, что ч.у.м. $\langle N, \leq \rangle$ является вполне упорядоченным. 3. Супремум подмножества L ч.у.м. $\langle N, \leq \rangle$ существует тогда и только тогда, когда множество L – конечно (ограничено). Перенесем этот результат на ч.у.м. характеристических функций, а, следовательно, и на ч.у.м. мультимножеств (так как они изоморфны). Тогда получим, что супремум произвольного подмножества μ ч.у.м. $\langle \mathrm{M}, \preceq \rangle$ существует, тогда и только тогда, когда это множество ограничено сверху. 4. Доказательство этого утверждения также вытекает из известной формулы нахождения супремума множества функций при условии, что супремум существует.□

Таким образом, согласно предложению 1, ч.у.м. $\langle \mathrm{M}, \preceq \rangle$ имеет наименьший элемент (пустое мультимножество – $\varnothing_m$) и любое его подмножество, ограниченное сверху, имеет точную верхнюю грань. Значит, следуя терминологии работ [Davey, 1990], [Биркгоф, 1984], ч.у.м. $\langle \mathrm{M}, \preceq \rangle$ является одновременно условно полным множеством и полной полурешеткой (complete semilattice). Таким образом, установлена

Теорема 3. Ч.у.м. $\langle \mathrm{M}, \preceq \rangle$ является условно полным множеством и полной полурешеткой, при этом точные грани находятся согласно формул предложения 1.□

Доказательство вытекает из определений условно полных множества и полурешетки и предложения 1. □

Пополним частично упорядоченное множество $\langle \mathrm{M}, \preceq \rangle$ наибольшим элементом T; полученное ч.у.м. обозначим через $\langle \mathrm{M} \cup \{\mathrm{T}\}, \preceq \rangle$.

Следствие 1. Ч.у.м. $\langle \mathrm{M} \cup \{\mathrm{T}\}, \preceq \rangle$ является полной решеткой с наименьшим элементом $\varnothing_m$ и наибольшим элементом T.□

Доказательство проводится очевидным образом; кроме того, можно использовать общий результат теории решеток [Биркгоф, 1984].□

Ч.у.м. $\langle \mathrm{M}, \preceq \rangle$ можно вложить и в другую полную решетку. Для этого расширим понятие мультимножества. С этой целью пополним множество натуральных чисел без нуля N^+ наибольшим элементом ∞ и положим $N_\infty^+ = N^+ \bigcup \{\infty\}$. Под мультимножеством будем понимать функцию вида $\alpha : U_\alpha \to N_\infty^+$, семейство всех таких мультимножеств обозначим через M_∞. Порядок на множестве N_∞^+ обозначим через $\le_\infty$, тогда порядок на мультимножествах $\preceq$ расширяется так: $\alpha \preceq_\infty \beta \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall d \left(\chi_\alpha(d) \le_\infty \chi_\beta(d) \right)$, $\alpha, \beta \in \mathrm{M}_\infty$.

Отметим характерный факт: именно мультимножества с не более чем счетной кратности элементов основ естественно появляются при задании денотационной семантики рекурсивных запросов в SQL-подобных языках [Буй, Поляков, 2010].

Теорема 4. Ч.у.м. $\langle \mathrm{M}_\infty, \preceq_\infty \rangle$ является полной решеткой с наименьшим элементом $\varnothing_m$ и наибольшим элементом T_∞, где $\mathrm{T}_\infty : D \to \{\infty\}$, $\mathrm{T}_\infty(d) = \infty$ для всех $d \in D$. Точные нижние грани находятся по формулам предложения 1, для точных верхних граней выполняется формула $\sup \mu = \alpha$, где характеристическая функция мультимножества α такая – $\chi_\alpha(d) = \sup\limits_{\le_\infty, \beta \in \mu} \chi_\beta(d)$.□

Доказательство. Очевидно, что $\langle N_\infty^+, \le_\infty \rangle$ является полной решеткой. Остается применить тот хорошо известный факт, что прямое произведение полных решеток будет полной решеткой, и использовать уже неоднократно упоминавшеюся формулу для нахождения точных граней подмножеств прямого произведения. □

Выводы

В статье в систематизированном виде представлен обзор существующей литературы по теории и применению мультимножеств (уточняющих понятие совокупности с конечными повторениями). Рассмотренные работы разделены на четыре раздела: абстрактная теория мультимножеств, обзорные статьи по мультимножествам, применение мультимножеств в табличных базах данных и другие применения мультимножеств.

В работе также приведены базовые определения, касающиеся теории мультимножеств: мультимножества, его характеристической функции, отношения включения, операций объединения и пересечения. Построена решетка мультимножеств, выяснена структура ч.у.м. мультимножеств по естественному отношению включения. Построены вложение ч.у.м. мультимножеств в две полные решетки, при этом одна их этих полных решеток строится путем обобщения понятия мультимножества (допускается бесконечная кратность элементов основы).

Таким образом, мультимножества имеют многочисленные применения и содержательную математическую теории; следовательно, мультимножества действительно можно рассматривать в качестве альтернативы (по крайней мере потенциально) канторовской теоретико-множественной платформы и, значит, теорию мультимножеств необходимо вводить в учебные программы дисциплин, поддерживающих математические основы информатики (в частности, дискретная математика, теория табличных баз данных, биоинформатика, теория принятия решений).

Список литературы

[Albert, 1991] J. Albert. Algebraic properties of bag data types // Seventeenth International Conference on Very Large Data Bases. – 1991. – P. 211-219.

[Blizard, 1989] W. Blizard. The Development of Multiset Theory // Notre Dame Journal of Formal Logic. – 1989. – Vol. 30, No. 1. – P. 36-66.

[Bonchis, 2005] C. Bonchis, C. Izbasa, G. Ciobanu. Information Theory over Multiset // Research Institute “re-Austria”, Institute of Computer Science. – 2005.

[Davey, 1990] B.A. Davey, H.A. Priestly. Introduction to Lattice and Order. – Cambridge: Cambridge University Press, 1990. – 248 p.

[DNA] DNA computing. [Электронный ресурс]: from Wikipedia, the free encyclopedia. – Режим доступа: http://en.wikipedia.org/wiki/DNA_computing.

[Knuth, 1992] D.E. Knuth. Context-Free Multilanguages // Theoretical Studies in Computer Science. – Academic Press. – 1992. – P. 1-13.

[Lamperti, 2001] G. Lamperti, M. Melchiori, M. Zanella. On Multisets in Database Systems // Multiset Processing: Mathematical, Computer Science, and Molecular Computing Points of View, number 2235 in Lecture Notes in Computing Since. – Berlin: Springer-Verlag, 2001. – P. 147-215.

[Libkin, 1997] L. Libkin, L. Wong. Query Language for Bags and Aggregates Function // Journal of Computer and System Sciences. – 1997. – Vol. 55, No. 1. – P. 241-272.

[Libkin, 1993] L. Libkin, L. Wong. Some Properties of Query Language for Bags // Proceedings of 4th International Workshop on Database Programming Languages. – New York. – 1993. – P. 97-114.

[Lloyd, 1998-1] J.W. Lloyd. Programming with Multisets // Department of Computer Science University of Bristol. – 1998.

[Lloyd, 1998-2] J.W. Lloyd. Programming with Sets and Multisets // Department of Computer Science, Bristol. – 1998.

[Ross, 2004] K.A. Ross, J. Stoyanovich. Symmetric relations and cardinality-bounded multisets in database systems // Very Large Database Endowment: international conference. – Toronto, Canada: proceedings. – 2004. – Vol. 30. – P. 912-923.

[Singh, 2007] D. Singh, A.M. Ibrahim, T. Yohanna, J.N. Singh. An Overview of the Applications of Multisets // Novi Sad Journal of Mathematics. – 2007. – Vol. 37, No. 2. – P. 73-92.

[SQL:2003] Наиболее интересные новшества в стандарте SQL:2003 [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.nestor.minsk. by/sr/2004/03/ 40331.html.

[Syropoulos, 2001] A. Syropoulos. Mathematics of Multisets // Multiset Processing: Mathematical, Computer Science, and Molecular Computing Points of View, number 2235 in Lecture Notes in Computing Since. – Berlin: Springer-Verlag, 2001. – P. 347-358.

[Барендрегт, 1985] Х. Барендрегт. Лямбда-исчисление.: [пер. с англ.]. – Москва: Мир, 1985. – 606 с.

[Биркгоф, 1984] Г. Биркгоф. Теория решеток. – Москва: Наука, 1984. – 564 с.

[Башкин, 2005] В.А. Башкин, И.А. Ломазова. Подобие обобщенных ресурсов в сетях Петри [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://lvk.cs.msu.su/files/ mco2005/ bashkin.pdf.

[Буй, 2002] Д.Б. Буй. Теорія програмних алгебр композиційного типу та її застосування: дисертація доктора фізико-математичних наук: 01.05.03 – математичне та програмне забезпечення обчислювальних машин та систем. – Київ, 2002. – 365 с.

[Буй, Поляков, 1999] Д.Б. Буй, С.А. Поляков. Композиційна семантика SQL-подібних мов: мультимножини, рядки, впорядковані таблиці // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. – 1999. Вип. 2. – С. 183-194.

[Буй, Поляков, 2010] Д.Б. Буй, С.А. Поляков. Композиційна семантика рекурсивних запитів в SQL-подібних мовах // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2010. Вип. 1. – С. 45-50.

[Буй, Редько, 1984] Д.Б. Буй, В.Н. Редько. Примитивные программные алгебры целочисленных и словарных функций // Докл. АН УССР, Сер. А. Физ.-мат. и техн. науки. – 1984. – № 10. – С. 69-71.

[Бурбаки, 1965] Н. Бурбаки. Теория множеств. – Москва: Мир, 1965. – 455 с.

[Гарсиа-Молина, 2004] Г. Гарсиа-Молина, Дж. Ульман, Дж. Уидом. Системы баз данных: [полный курс: пер. с англ.] – Москва: Вильямс, 2004. – 1088 с.

[Кнут, 2000] Д. Кнут. Искусство программирования: [2 том, 3-е изд.: пер. с англ.] – Москва: Вильямс, 2000. – 832 с.

[Кузнецов] С.Д. Кузнецов. Концептуальное проектирование реляционных баз данных с использованием языка UML [Электронный ресурс] – Режим доступа: ftp://ftp.dol.ru/pub/users/cgntv/download/sbornic/sbornic9/Doc13.doc.

[Малинец, 2005] Г.Г. Малинецкий, С.А. Науменко. Вычисления на ДНК. Эксперименты. Модели. Алгоритмы. Инструментальные средства [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.keldysh.ru /papers/2005/ prep57/ prep2005_57.html.

[Мальцев, 1970] А.И. Мальцев. Алгебраические системы. – Москва: Наука, 1970. – 392 с.

[Петровский, 2002] А.Б. Петровский. Основные понятия теории мультимножеств. – Москва: Едиториал УРСС, 2002. – 80 с.

[Петровский, 2003] А.Б. Петровский. Пространства множеств и мультимножеств. – Москва: Едиториал УРСС, 2003. – 248 с.

[Редько, 2001] В.Н. Редько, Ю.Й. Брона, Д.Б. Буй, С.А. Поляков. Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови. – Київ: Видавничий дім "Академперіодика", 2001. – 198 с.

[Сети Петри, 2000] Сети Петри [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.iacp.dvo.ru/lab_11/otchet/ot2000/pn3.html#top.

[Славин, 2006] О.А. Славин. Использование мультимножеств в распознавании символов // Труды института системного анализа российской академии наук. – 2006. – Том. 23. – С. 198-205.

[Скорняков, 1986] Л.А. Скорняков. Элементы алгебры. – Москва: Наука, 1986. – 240 с.

[Сухольский, 2004] Г.В. Сухольский. Математические методы в психологии. – Харьков: ФОЛИО, 2004. – 282 с.

Информация об авторах

Буй Дмитрий Борисович *– заведующий сектором проблем программирования, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, факультет кибернетики: 01601, ул. Владимирская, 64, Киев, Украина; e-mail: buy@unicyb.kiev.ua*

Богатырёва Юлия Александровна – аспирантка, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, факультет кибернетики: 01601, ул. Владимирская, 64, Киев, Украина; e-mail: j_bogatyreva@ukr.net