

Krassimir Markov, Vitalii Velychko, Oleksy Voloshin  
(editors)

**Information Models  
of  
Knowledge**

**ITHEA<sup>®</sup>  
KIEV – SOFIA  
2010**

**Krassimir Markov, Vitalii Velychko, Oleksy Voloshin (ed.)**

**Information Models of Knowledge**

ITHEA®

Kiev, Ukraine – Sofia, Bulgaria, 2010

ISBN 978-954-16-0048-1

First edition

Recommended for publication by The Scientific Council of the Institute of Information Theories and Applications FOI ITHEA  
ITHEA IBS ISC: 19.

This book maintains articles on actual problems of research and application of information technologies, especially the new approaches, models, algorithms and methods for information modeling of knowledge in: Intelligence metasynthesis and knowledge processing in intelligent systems; Formalisms and methods of knowledge representation; Connectionism and neural nets; System analysis and synthesis; Modelling of the complex artificial systems; Image Processing and Computer Vision; Computer virtual reality; Virtual laboratories for computer-aided design; Decision support systems; Information models of knowledge of and for education; Open social info-educational platforms; Web-based educational information systems; Semantic Web Technologies; Mathematical foundations for information modeling of knowledge; Discrete mathematics; Mathematical methods for research of complex systems.

It is represented that book articles will be interesting for experts in the field of information technologies as well as for practical users.

General Sponsor: Consortium FOI Bulgaria ([www.foibg.com](http://www.foibg.com)).

Printed in Ukraine

**Copyright © 2010 All rights reserved**

© 2010 ITHEA® – Publisher; Sofia, 1000, P.O.B. 775, Bulgaria. [www.ithea.org](http://www.ithea.org) ; e-mail: [info@foibg.com](mailto:info@foibg.com)

© 2010 Krassimir Markov, Vitalii Velychko, Oleksy Voloshin – Editors

© 2010 Ina Markova – Technical editor

© 2010 For all authors in the book.

® ITHEA is a registered trade mark of FOI-COMMERCE Co., Bulgaria

**ISBN 978-954-16-0048-1**

C/o Jusautor, Sofia, 2010

## О ПРИНЯТИИ РЕШЕНИЙ ПРИ АНАЛИЗЕ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ

Всеволод Богаенко, Владимир Кудин

**Аннотация.** На основе вычислительного эксперимента разработан вариант системы поддержки принятия решений (СППР) с применением метода базисных матриц (МБМ) для анализа влияния малых возмущений в линейных моделях.

**Ключевые слова:** линейные модели, количественный и качественный анализ, малые возмущения, базисная матрица.

**ACM Classification Keywords:** I. Computing Methodologies – I.6. Simulation and modeling

---

### Введение

подавляющее большинство технических и экономических процессов описывается в классе линейных моделей (ЛМ). Например, основная макроэкономическая модель, модель Леонтьева (МЛ) [Волошин, 2004], описывается в виде системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) при ограничениях на переменные в виде гиперпараллелепипеда. Учет неточности представления ЛМ (так называемая проблема адекватности математической и машинной модели) предопределяет разработку механизма согласования результатов проведения вычислений при разной точности представления данных модели. Некорректность модели при проведении вычислений в рамках ЛМ может существенно повлиять на качественные характеристики, например, величину ранга [Кудин, 2008]. Такие неточности зачастую обусловлены ограниченностью длины мантииссы при представлении чисел с плавающей запятой (*ошибки усечения, округления*) [Деммель 2001]. Использование разных типов данных при проведении вычислений (чисел с плавающей запятой одинарной, двойной, повышенной точности) существенно влияет на основные критерии оценки эффективности: быстродействие, точность и объемы вычислений.

---

### Цель исследования

Целью исследования являются: экспериментальный анализ влияния использования разных типов данных, алгоритмов, уровня обусловленности системы при построении вычислительных схем на основные параметры решения - точность самого решения и обращения матрицы, быстродействие; проверка эффективности вычислительных схем метода базисных матриц (МБМ) по указанным критериям на моделях заданной размерности; построение концепции принятия решения по достижению заданной эффективности вычислительного процесса.

---

### Концепция анализа

Концепция анализа ЛМ предполагается трехстадийной. Первая стадия содержит анализ типовой модели заданной размерности на разрешимость (существование, единственность решений СЛАУ), исследование свойств модели на основе базисного метода и алгоритма.

Вторая – проведение расчетов на основе вычислительных алгоритмов (без процедуры уточнения, с одно- или двухстадийной процедурой уточнения в каждом из них), при использовании разных типов данных (с плавающей запятой размерностью 64, 128, 256 бит) для СЛАУ с разными числами обусловленности. Фиксируются значения параметров быстродействия, точности решения и обращения матрицы, оценки объема используемой памяти.

Третья - построение функциональных зависимостей (интерполяционных многочленов) быстродействия, точности решения и обращения от используемых типов данных, алгоритмов, числа обусловленности.

## Постановка задачи

Предметом исследования является ЛМ:

$$Au = C, \quad (1)$$

где  $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,m}$  матрица размерности  $(n \times m)$ ,  $a_j = (a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jm})$ ,  $j \in J = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $l = \{1, 2, \dots, m\}$  – строки матрицы  $A$ ,  $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$  – вектор переменных,  $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$  – вектор градиента ограничений модели.

Для решения и анализа (1) в МБМ [Кудин, 2002] введены в рассмотрение строчные базисные матрицы. Базисные матрицы в ходе итераций последовательно изменяются замещением строк вспомогательной СЛАУ строками (нормальями ограничений) основной СЛАУ. В общем случае в исследуемой модели количество ограничений превышает количество переменных.

В работе исследовано влияние использования разных вариантов организации вычислений на эффективность алгоритмов метода базисных матриц. Предложена концепция построения системы поддержки принятия решения по организации вычислений на линейных моделях для достижения заданных значений параметров по основным критериям: точности и быстродействию.

## О влиянии малых возмущений в “малых” ЛМ методом базисных матриц (МБМ)

Структурно исследование было построено как многошаговая алгоритмическая процедура: построение последовательности модельных задач малой размерности со свойством плохой обусловленности с некоторого шага; нахождение на основе метода базисных матриц основных элементов МБМ; вычисление чисел обусловленности; графическое представление основных функциональных зависимостей. Эксперимент демонстрирует количественно-качественные связи основных параметров исследуемой модели и метода базисных матриц.

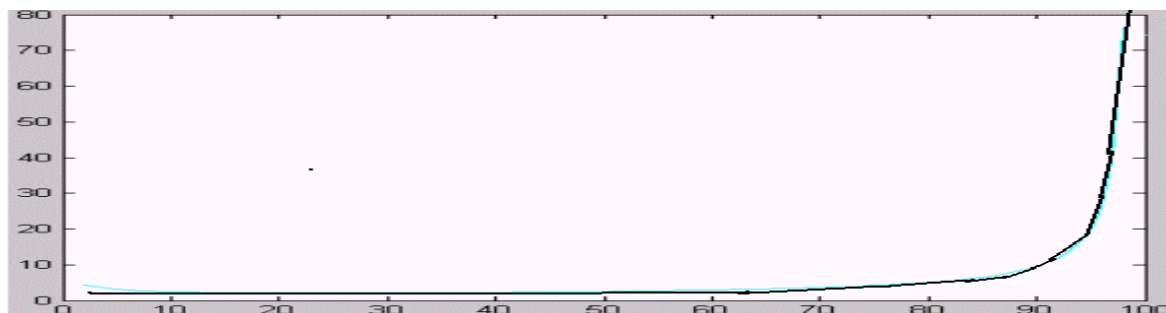


Рис. 1. Зависимость значений норм ведущих столбцов от номера итерации

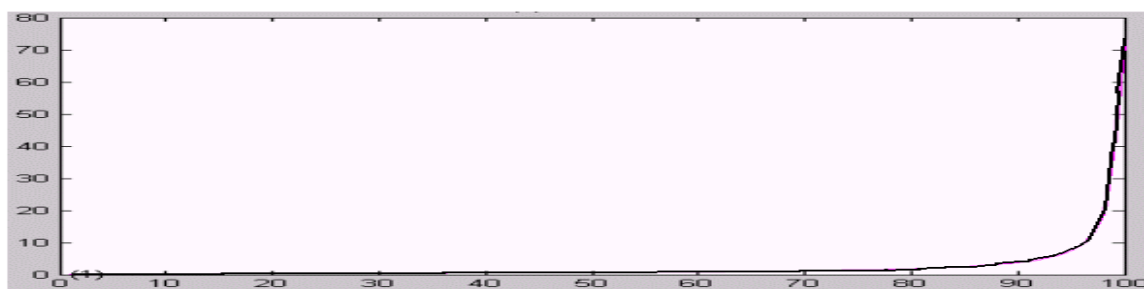


Рис. 2. Зависимость значений чисел обусловленности от номера итерации

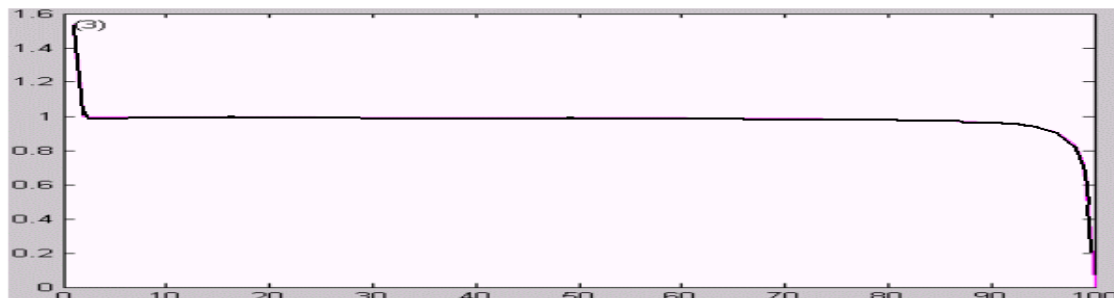
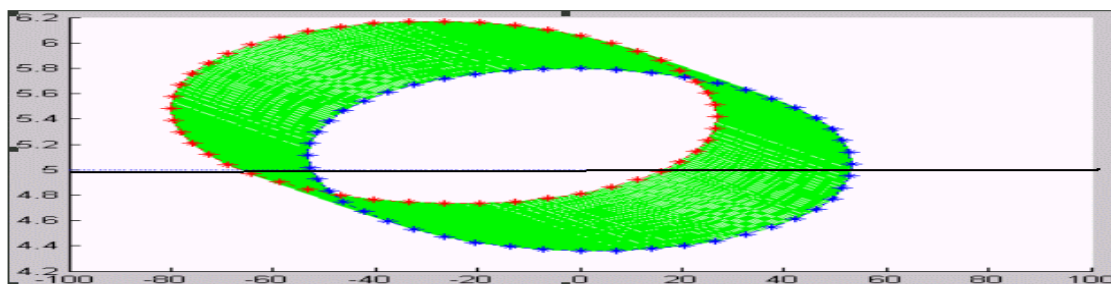


Рис. 3. Зависимость значений ведущих элементов от номера итерации

Рис. 4. Эллипсы принадлежности решений на итерациях метода  
(оси координат компоненты вектора решения)

Как видно из графиков, вхождение СЛАУ в состояние плохой обусловленности характеризуется количественными значениями (числа обусловленности, ведущих элементов, норм ведущих столбцов обратных матриц): число обусловленности резко увеличивается; ведущие элементы симплексных преобразований МБМ становятся как угодно близкими к нулю; нормы столбцов увеличиваются в состоянии плохой обусловленности; в состоянии плохой обусловленности малым возмущением в модели отвечают значительные качественные отклонения "соседних решений", "вход" системы в состояние плохой обусловленности предопределяет „вытягивание" эллипсоподобной фигуры относительно одной из осей (рис. 4.).

#### Вычислительный эксперимент анализа малых возмущений в ЛМ «средней» размерности

Быстродействие алгоритмов зависит только от размерности матрицы. Для вычислительного эксперимента были выбраны три процедуры МБМ: без уточнения решения (0), с одностадийным (1) и двухстадийным (2) уточнением.

Возможность применения разных типов данных: числа с плавающей запятой двойной точности (Double), 128-битные числа (Dd) и 256-битные числа (Qd) при разных модификациях алгоритмов МБМ позволяет построить систему поддержки принятия решения, которая на основе заданных пользователем ограничений на такие параметры алгоритмов, как быстродействие и точность, позволит выбрать наилучший по этим критериям алгоритм.

Выбор базируется на эвристических зависимостях параметров алгоритма и значений критериев от параметров матрицы ограничений  $n$  и некоторого параметра быстродействия системы для заданного типа данных и может быть оценен как:

$$T^2(n) = (3n^3 + n^2)t_c, \quad (2)$$

где значение параметра  $t_c$  должно оцениваться для каждой конкретной аппаратно-программной платформы экспериментальным путем.

Стоит отметить, что на одной и той же вычислительной платформе, отношение быстродействия алгоритмов, использующих разные типы данных, будет постоянным. Данные вычислительных экспериментов показали, что на выбранной для тестирования платформе, алгоритм, использующий 128-битные числа, был в ~35 раз медленней, чем алгоритм, использующий 64-битные числа, а в случае 256-битных чисел – в ~450 раз медленней. Такое существенное замедление объясняется тем, что операции с числами с плавающей запятой большого размера не реализованы аппаратно, в отличие от операций над 64-битными числами.

Что касается объема используемой алгоритмами памяти, то он пропорционален размеру используемого типа данных и будет, по сравнению с 64-битными числами, вдвое большим для 128-битных и вчетверо большим для 256-битных.

Для построения эвристических зависимостей между точностью решения и числом обусловленности была проведена серия вычислительных экспериментов. Используемая для тестирования аппаратная платформа – процессор AMD Athlon64 с реальной тактовой частотой 1.8Ghz, 512Mb оперативной памяти.

Проводилось решение разными алгоритмами МБМ СЛАУ размерностью 256x256.

В качестве критерия точности брались точность машинного решения  $u_0(1)$  в сравнении с аналитическим (точным)  $u = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $\varepsilon_2 = \|u_0 - (1, 0, \dots, 0)\|$ . Полученные экспериментальные данные приведены в табл. 1.

На основе этих данных (и данных при других размерностях) построены зависимости точности решения от числа обусловленности (Рис. 1.), в котором используются следующие обозначения: double – числа с плавающей запятой двойной точности (64битной размерности), dd – числа с плавающей запятой размерности 128 бит, qd – числа с плавающей запятой размерности 256 бит, +0( ), +1, +2 – количество итераций уточнения,  $\log_{10} c$  – порядок числа обусловленности системы,  $-\log_{10} \varepsilon_2$  – порядок точности решения.

Таблица 1. Зависимость порядка точности решения  $\varepsilon_2(\log_{10} \varepsilon_2)$  от числа обусловленности ( $m = 256$ )

$\log_{10} c$	6	7	8	9	10	11	12	12
Без уточнения решения (0)								
double	-15.81	-12.29	-8.89	-2.75				
dd	-46.16	-42.45	-39.07	-34.66	-32.50	-27.71	-22.33	-19.33
qd	-113.35	-107.94	-104.76	-100.43	-96.25	-93.69	-86.65	-85.01
Одностадийное уточнение (1)								
double+1	-12.40	-10.55	-5.37	-2.70				
dd+1	-45.92	-43.43	-36.86	-31.96	-29.12	-26.33	-22.43	-17.85
qd+1	-109.58	-108.57	-103.25	-95.93	-93.22	-91.00	-87.99	-80.48
Двух стадийное уточнение (2)								
double+2	-10.85	-8.55	-6.75	-2.27				
dd+2	-44.41	-42.15	-36.89	-32.16	-31.15	-26.44	-21.90	-20.09
qd+2	-101.21	-106.73	-107.70	-100.30	-93.89	-87.59	-86.52	-85.47

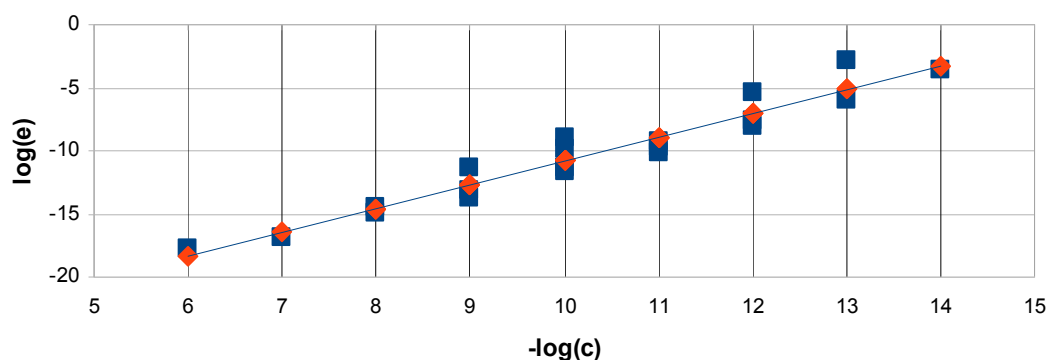


Рис. 1. Зависимость порядка точности  $\varepsilon_2$  ( $\log_{10} \varepsilon_2$ ) от числа обусловленности

**Вычислительный эксперимент установил близкие к линейным зависимости:** точности решения (и обращения матрицы) от числа обусловленности (при фиксированном типе данных, алгоритме) и размерности модели, точности решения от типа данных (при фиксированном числе обусловленности и алгоритме), *близкие к полиномиальным зависимости* быстродействия от размерности задачи (при фиксированных типах данных, числе обусловленности и размерности модели).

Учитывая полученные зависимости, алгоритм “работы” системы поддержки принятия решений можно описать следующим образом.

**Входные данные:**  $t_m$  - максимально допустимое время расчётов;  $\varepsilon_m$  - максимально допустимая погрешность решения;  $P$  - приоритетность критериев (времени и погрешности).

1) Построение множества алгоритмов, которые удовлетворяют условию относительно времени расчётов:

$A_t = \{A_i : T_i(n) < t_m\}$ , где  $T_i(n)$  - время работы алгоритма  $A_i$ ,  $i = \overline{1,6}$ , которое оценивается по формуле (2) (в общем случае на множестве алгоритмов).

2) Построение множества алгоритмов, которые удовлетворяют условию относительно погрешности:

$A_\varepsilon = \{A_i : E_i(n, \alpha) < \varepsilon_m\}$ , где  $E_i(n, \alpha)$  - оценка погрешности обращения матрицы или решения СЛАУ для алгоритма  $A_i$ ,  $i = \overline{1,6}$ , в общем случае из множества алгоритмов.

3) Если  $A_t \cap A_\varepsilon \neq \emptyset$ , в зависимости от приоритетности выбирается самый быстрый (или самый точный) алгоритм из множества приемлемых значений критериев  $A_t \cap A_\varepsilon$ .

4) В случае, когда  $A_t \cap A_\varepsilon = \emptyset$ ,  $A_t \neq \emptyset$  ( $A_\varepsilon \neq \emptyset$ ), в зависимости от приоритетности выбирается самый быстрый алгоритм из  $A_\varepsilon$  (или самый точный алгоритм из  $A_t$ ).

5) Если  $A_t = \emptyset$  или  $A_\varepsilon = \emptyset$  в зависимости от приоритетности выбирается самый быстрый или самый точный алгоритм из  $A_t \cup A_\varepsilon$  (лучший из неприемлемых).

## Выводы

Построенная концепция принятия решения на основе МБМ обладает следующими возможностями:

- анализировать и находить решения (и уточнять при необходимости) линейных систем уравнений за фиксированное время с заданной точностью по системе критериев;
- использовать решения исходной задачи для типовых моделей (при разных вариантах организации вычислительного процесса) для анализа и построения механизма принятия решений;

---

- строить экстраполяционные зависимости (для точности решений и быстродействия алгоритмов) от размерности (типовой модели) при фиксированном значении числа обусловленности и типе данных.

---

### Благодарности

---

Авторы благодарны проф. Волошину А.Ф. за консультации при написании статьи.

Статья частично финансирована из проекта ITHEA XXI Института Информационных теорий и Приложений FOI ITHEA и Консорциума FOI Bulgaria ([www.itea.org](http://www.itea.org), [www.foibg.com](http://www.foibg.com)).

---

### Литература

---

[Волошин, 2004] Волошин О.Ф. Методи аналізу статичних балансових еколого-економічних моделей великої розмірності // Наукові записки, Т. VII, КПДВ "Педагогіка", Київ, 2004,- С. 43-55

[Кудин. 2008] Кудин В., Кудин Г., Волошин А. Анализ свойств модели Леонтьева при нечетко заданных параметрах с применением метода базисных матриц // Information Science & Computing, International Book Series, Number 7, Volume 7, ITHEA, SOFIA, p. 86-90, 2008.

[Деммель 2001] Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложение М.: Мир, -2001.-430с.

---

### Информация об авторах

---

**Всеволод О. Богаенко** – к.т.н., с.н.с., Киев, Институт кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины, Украина; e-mail: [sewab@ukrnet.ua](mailto:sewab@ukrnet.ua)

**Владимир И. Кудин** – доктор технических наук, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Украина, 01017 Киев, ул. Владимирская, 64; e-mail: [V.I.Kudin@mail.ru](mailto:V.I.Kudin@mail.ru)