

---

## ЭФФЕКТИВНОСТЬ БАЙЕСОВСКИХ ПРОЦЕДУР РАСПОЗНАВАНИЯ

Александра Вагис, Анатолий Гупал

**Аннотация:** В основе байесовского подхода лежит определение таких структур описания объектов, для которых возможно построение эффективных (оптимальных) процедур распознавания. В настоящее время эти вопросы решены для дискретных объектов с независимыми признаками и объектов, которые описываются цепями Маркова. Получены детерминированные оценки погрешности байесовской процедуры распознавания в зависимости от размеров классов (обучающих выборок), количества признаков и количества значений признаков.

**Ключевые слова:** Байесовская процедура; погрешность процедуры; цепь Маркова; обучающая выборка.

**ACM Classification Keywords:** H.4.2 Information Systems Applications: Types of Systems: Decision Support.

**Conference:** The paper is selected from XV<sup>th</sup> International Conference “Knowledge-Dialogue-Solution” KDS-2 2009, Kyiv, Ukraine, October, 2009.

---

### Введение

Задача распознавания рассматривается с точки зрения минимизации функционала среднего риска [Вапник, 1979]. Такая постановка является обобщением классических задач, решаемых на основе метода наименьших квадратов, в том смысле, что наблюдению объекта может соответствовать не одно, а несколько состояний объектов. Она на порядок сложнее любой NP-полной задачи [Гэри, Джонсон, 1982]. При решении задач распознавания определяющим моментом является структура описания объекта. Если она известна, то не представляет труда по обучающей выборке построить байесовские процедуры, как это сделано для независимых признаков и цепей Маркова [Гупал, 1995], [Гупал, Вагис, 2001]. В дискретном случае показано, что оценка снизу сложности класса задач распознавания совпадает с верхней оценкой погрешности с точностью до абсолютной константы, т.е. байесовская процедура распознавания является субоптимальной. Количество классов и число значений признаков линейным образом входят в оценку погрешности байесовской процедуры распознавания. Таким образом, проблема минимизации среднего риска решена для дискретных объектов с независимыми признаками: построены оптимальные оценки погрешности процедур распознавания в зависимости от входных параметров задачи. Исследование эффективности байесовской процедуры распознавания на цепях Маркова основано на исследовании свойств оценок переходных вероятностей. Для нестационарных цепей Маркова получены асимптотические оценки погрешности байесовской процедуры распознавания, которые аналогичны оценкам для независимых признаков.

В монографии [Гупал, Сергиенко, 2008], по сути, впервые проведено обоснование индуктивного подхода с точки зрения построения эффективных процедур распознавания. Сделан вывод о том, что современную математику следует считать объединением дедуктивного и индуктивного подходов. Сфера применения дедуктивного подхода – получение точных решений в задачах малой размерности; область применения индуктивного подхода – решение задач распознавания и прогнозирования большой размерности на основе информации в обучающих выборках. В [Гупал, Сергиенко, 2008] излагаются прикладные аспекты развиваемой теории. Проведенные численные расчеты на основе информации из Всемирного банка белковых структур подтвердили высокую эффективность байесовских процедур распознавания (на моделях цепей Маркова различных порядков) в задачах распознавания вторичной структуры белков. Обсуждаются вопросы прогнозирования курсов акций ценных бумаг, валют, диагностики глиом головного мозга и т.д.

### Постановка задачи распознавания в булевом случае

Пусть имеются множество объектов  $X$ , множество ответов  $Y$  (состояний объектов). Совокупность пар  $X^l = (x^i, y_i)_{i=1}^l$  называется обучающей выборкой. Элементы множества  $X$  – это не реальные объекты, а лишь их описания, содержащие доступную часть информации об объектах. Невозможно исчерпывающим образом охарактеризовать, скажем, человека, геологический район, производственное предприятие или экономику страны. Поэтому одному и тому же описанию  $x$  могут соответствовать различные объекты, а, значит, и некоторое множество ответов (состояний объектов). Предполагается, что на множестве  $X \times Y$  существует неизвестное вероятностное распределение  $P(x, y)$ , согласно которому сгенерирована выборка пар  $X^l = (x^i, y_i)_{i=1}^l$ ,  $x$  – булев вектор  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  размерности  $n$ , состояние  $y$  принимает два значения нуль и единица. Для функции распознавания  $A(x)$  определяется качество обучения в виде функционала

$$I(A) = \sum_{x \in X} \sum_{y=0}^1 (A(x) - y)^2 P(x, y). \quad (1)$$

Минимизация среднего риска (1) является обобщением классических задач, решаемых на основе метода наименьших квадратов, т.е. когда наблюдению  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  соответствует не одно, а несколько состояний объектов (исходов экспериментов). В.Н. Вапник и А. Я. Червоненкис были одними из первых, кто придал задачам распознавания строгую математическую трактовку. В дальнейшем задача минимизации среднего риска (1) привлекла внимание многих ученых. Для булевых векторов  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  число различных функций  $A(x) \in \{0,1\}$  равно  $2^{2^n}$ . С математической точки зрения проблема минимизации среднего риска (1) сложнее любой NP-полной задачи, кроме того, проверку решения нельзя провести за полином операций, поскольку усреднение в (1) выполняется по всем  $2^n$  векторам  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Предполагается, что наблюдаемый объект описывается вектором  $x_1, x_2, \dots, x_n, f$ , где  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – признаки (измерения) объекта,  $f$  – состояние объекта. Пусть проведено  $m$  наблюдений над объектами и в каждом случае было зафиксировано состояние объекта. Имеем обучающую выборку  $V = (V_0, V_1, V_2)$  следующего вида: первая часть  $V_0$  – булева матрица размерности  $m_0 \times n$ , где  $m_0$  – число строк. Каждая строка представляет собой вектор  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, f)$ , который выбран в соответствии с распределением  $P$  при условии  $f = 0$ . Вторая часть  $V_1$  – булева матрица размерности  $m_1 \times n$ , где  $m_1$  – число строк. Каждая строка матрицы – вектор  $x$ , который выбран на основе распределения  $P$  при условии  $f = 1$ . Последняя часть  $V_2$  – булев вектор размерности  $m_2$ . Каждая компонента этого вектора – наблюдаемое значение состояния  $f$ , которое выбирается в соответствии с распределением  $P$ , можно считать, что  $m_2 = m = m_0 + m_1$ . **Индуктивный шаг.** Требуется построить такую процедуру индуктивного вывода, которая по измерениям  $x_1, x_2, \dots, x_n$  любого следующего объекта и обучающей выборке  $V = (V_0, V_1, V_2)$  определяет состояние  $f$  объекта.

**Погрешность процедуры. Сложность класса задач.** Полагаем, что процесс определения состояния  $f$  объекта по известным значениям вектора входа  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  проводится с помощью функции  $A(x)$ , т.е.  $f = A(x)$ . Так как множество функций  $A(x)$  конечно, то среди них существует наилучшая функция  $A^*(x)$ , такая, что  $P(x, A^*(x)) = \max(P(x, 0), P(x, 1))$ . Легко заметить, что функция  $A^*(x)$  минимизирует средний риск (1).

Погрешность функции  $A(x)$  – усредненная величина

$$\nu(A, P) = \sum_x P(x, A^*(x)) - P(x, A(x)). \quad (2)$$

т.е.  $\nu(A^*, P) \equiv 0$ . Погрешность (2) в отличие от методов минимизации эмпирического риска указывает на отклонение погрешности функции  $A(x)$  от минимума среднего риска, поэтому для практических расчетов с ней удобнее работать. Индуктивная процедура распознавания  $Q$  строит по данной выборке  $V = (V_0, V_1, V_2)$  и вектору  $x$  функцию  $A(x) = Q(V, x)$ . Погрешность процедуры  $Q$  на распределении  $P$  – усредненная величина:

$$\nu(Q, P) = \sum_{V \in W} \nu(A, P) P_1(V). \quad (3)$$

Усреднение (3) – принципиальный момент в теории оценивания погрешности процедур распознавания, заключающийся в усреднении погрешности функции по множеству всех обучающих выборок, имеющих заданные размеры классов. В результате такого усреднения получается детерминированная оценка погрешности байесовской процедуры распознавания для всего класса задач, учитывающего совокупность всевозможных распределений вероятностей. Заметим, что в методах минимизации эмпирического риска аналогичные оценки носят асимптотический и вероятностный характер, в связи с чем, их неудобно использовать на практике [Вапник, 1979]. Операция усреднения по своей сути выполняет функцию контроля: формула (3) оценивает качество работы процедуры на всевозможных новых объектах, не входящих в состав обучающей выборки.

Класс задач  $C \equiv C(m_0, m_1, m_2, n)$  – совокупность всевозможных распределений вероятностей  $P$ , детерминированные числа  $m_0, m_1, m_2, n$  – вход задачи, они определяют размеры выборки. Погрешностью процедуры распознавания  $Q$  на классе  $C$  называется число  $\nu(Q, C) = \sup_{P \in C} \nu(Q, P)$ .

Сложность класса  $C$  определяется величиной  $\mu(C) = \inf_Q \nu(Q, C) = \inf_Q \sup_{P \in C} \nu(Q, P)$ . В конечном итоге нужно построить такую процедуру распознавания  $Q$ , для которой число  $\nu(Q, C)$  мало отличается от числа  $\mu(C)$ .

### Байесовская процедура распознавания

Нами выбран прямой подход к построению методов распознавания: необходимо определить такие структуры описания объектов, для которых можно построить эффективные и даже оптимальные процедуры распознавания. Этот подход имеет очевидное преимущество перед другими подходами: вместо использования достаточно сложных процедур минимизации эмпирического риска или других функционалов качества (в специальном классе параметрических функций) используется простое байесовское правило классификации, которое используется для решения задач большой размерности. Известно, что оптимальным правилом классификации является байесовское правило, которое максимизирует апостериорную вероятность распределения классов при заданном наборе признаков объекта. Однако проблема заключается в том, что распределение вероятностей неизвестно, известны лишь эмпирические данные относительно значений признаков объектов и их состояний, которые составляют обучающую выборку. Построенное правило классификации должно хорошо работать за пределами обучающей выборки, т.е. обладать обобщающей способностью. Необходимо также, чтобы оценка погрешности процедуры достаточно быстро уменьшалась при увеличении размеров классов объектов, составляющих обучающую выборку.

Пусть  $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$  – булев вектор. Считаем, что распределения  $P$  из класса  $C$  при каждом  $d$  удовлетворяют условию  $P(x = d) = \prod_{j=1}^n P(x_j = d_j | f = i)$ ,  $i = 0, 1$ , что означает независимость признаков  $x_j$  для каждого класса объектов. Рассматриваются случайные величины  $\xi(d, i)$ , которые зависят от  $d$  и  $i$  как от параметров,:

$$\xi(d, i) = (k(i) / m_2) \prod_{j=1}^n (k(d_j, i) / m_1), \quad i = 0, 1. \quad (4)$$

Здесь  $k(d_j, i)$  – количество значений, равных  $d_j$ ,  $j$ -го признака в  $j$ -м столбце матрицы  $V_i$ ;  $k(i)$  – количество значений целевого признака, равных  $i$ , в векторе  $V_2$ . Тогда функция распознавания определяется формулой

$$A(d) = \begin{cases} 0, & \text{если } \xi(d,0) \geq \xi(d,1), \\ 1, & \text{если } \xi(d,0) < \xi(d,1). \end{cases} \quad (5)$$

Процедуру распознавания, определяемую соотношениями (4), (5), обозначим  $Q_B$ . Заметим, что величины  $\xi(d, i)/(\xi(d,0) + \xi(d,1))$  представляют собой приближенные значения вероятностей  $P(f = i | x_1 = d_1, x_2 = d_2, \dots, x_n = d_n)$ , вычисленных по теореме Байеса. При подсчете оценок этих вероятностей существенным образом используется информация относительно размеров классов в обучающей выборке, поэтому эти значения входят в приводимые ниже оценки погрешности байесовской процедуры. Для байесовской процедуры проводить разбиение на обучающую и контрольную выборки не нужно, поскольку при подсчете погрешности учитывается работа процедуры на всем множестве обучающих выборок. Байесовская процедура (4), (5) строится программным образом, найти аналитический вид функции распознавания (5) невозможно. На основе неравенства Чебышева выведена оценка сверху погрешности байесовской процедуры на классе  $C$  [Гупал, 1995].

**Теорема 1.** *Существует абсолютная константа  $\alpha < \infty$ , такая, что справедливо неравенство*

$$\nu(Q_B, C) \leq \alpha \sqrt{\frac{n}{\min(m_0, m_1)} + \frac{1}{m_2}}. \quad (6)$$

При условии  $\min(m_0, m_1) \geq 2n$  оценка сверху погрешности байесовской процедуры задается квадратным корнем, в противном случае (для малых выборок) она не превосходит единицы. Из доказательства теоремы вытекает, что абсолютная константа  $\alpha = 4\sqrt{2}$ . При выводе этой теоремы не нужно требовать, как в методах минимизации эмпирического риска, равномерную сходимую частот к их вероятностям, поскольку в силу усреднения (3) математическое ожидание и дисперсии частот в формуле (4) совпадают с вероятностями и дисперсиями бернуллиевских случайных величин. Показано, что если в обучающей выборке отсутствует один из классов, т.е.  $\min(m_0, m_1) = 0$ , то любая процедура, в том числе и байесовская, работает плохо и ее погрешность строго положительна.

В теории минимизации эмпирического риска [Вапник, 1979] отсутствуют нижние оценки погрешности процедур, поэтому нельзя сделать вывод относительно эффективности предложенного подхода. Для доказательства оптимальности байесовской процедуры распознавания необходимо показать, что никакая другая процедура распознавания не может «работать лучше», чем байесовская процедура. В монографии [Гупал, Сергиенко, 2008] с помощью нетривиальных контрпримеров построены такие «плохие» распределения вероятностей, для которых нижняя оценка погрешности произвольной процедуры распознавания отличается от верхней оценки погрешности байесовской процедуры на абсолютную константу, т.е. байесовская процедура распознавания является субоптимальной.

**Теорема 2.** *Существует абсолютная константа  $a_1 > 0$  такая, что справедливо следующее: каковы бы ни были целые числа  $m_0, m_1, m_2$ , натуральное число  $n$ , и процедура распознавания  $Q$ , существует такое распределение вероятностей  $P$  из класса  $C$ , что выполняется неравенство*

$$\nu(Q, P) \geq a_1 \sqrt{\frac{n}{\min(m_0, m_1)} + \frac{1}{m_2}}. \quad (7)$$

Получен также интересный результат относительно того, что байесовская процедура распознавания в булевом случае эквивалентна процедуре распознавания, построенной на использовании отделяющей гиперплоскости.

### Байесовская процедура. Дискретный случай

С точки зрения получения оценок погрешностей дискретный случай сложнее, чем булев случай, так как необходимо дополнительно учесть такие параметры, как число классов и количество значений признаков. Построение оценок в дискретном случае – нетривиальная задача, поскольку заранее неизвестно как количество классов, количество признаков и число значений признаков будут представлены в оценке погрешности байесовской процедуры распознавания.

Пусть имеется конечное множество  $X$  описаний объектов  $b = (x_1, x_2, \dots, x_n, f)$ ; здесь  $n$  – натуральное число,  $x_j \in \{0, 1, \dots, g-1\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ ;  $f \in \{0, 1, \dots, h-1\}$ ;  $g$  – число значений признаков,  $h$  – количество классов (состояний),  $g \geq 2$ ,  $h \geq 2$ . В обучающей выборке  $V$  количества объектов различных классов заданы; более того, на практике они часто определяются заранее. Поэтому считаем, что выборка  $V$  состоит из  $h+1$  части,  $V = (V_0, V_1, \dots, V_h)$ . Пусть  $m_0, m_1, \dots, m_h$  – целые неотрицательные детерминированные числа. Часть  $V_i$  представляет собой целочисленную матрицу размерностью  $m_i \times n$ . Каждая строка этой матрицы является наблюдаемым значением вектора  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , описывающего объект класса  $i$ , который выбран из множества  $X$  в соответствии с распределением вероятностей  $P$  при условии  $f = i$ . Последняя часть  $V_h$  представляет собой целочисленный вектор размерностью  $m_h$ . Каждая компонента этого вектора есть наблюдаемое значение целевого признака  $f$ , которое выбирается в соответствии с распределением  $P$ . Иными словами, вероятность того, что  $j$ -я компонента вектора  $V_h$  принимает значение  $i$ , равна  $P(f = i)$ . Все строки матрицы  $V_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, h-1$  и компоненты вектора  $V_h$  являются независимыми случайными элементами. Считаем  $m_0 \leq m_1 \leq \dots \leq m_{h-1}$ ; выполнение этого неравенства всегда можно обеспечить путем перенумерации классов объектов.

Байесовская процедура распознавания определяется на основе формулы

$$\xi(d, i) = \frac{k(i)}{m_h} \prod_{j=1}^n \frac{k(d_j, i)}{m_i}, \quad i \in \{0, 1, \dots, h-1\}. \quad (8)$$

Здесь  $k(d_j, i)$  – количество значений, равных  $d_j$ ,  $j$ -го признака в  $j$ -м столбце матрицы  $V_i$ ;  $k(i)$  – количество значений целевого признака  $f$ , равных  $i$ , в векторе  $V_h$ . Значение функции распознавания  $A(d)$  равно минимальному числу  $s$  из множества  $\{0, 1, \dots, h-1\}$  такому, что

$$\xi(d, s) \geq \xi(d, i), \quad i \in \{0, 1, \dots, h-1\}. \quad (9)$$

Приведем оценку сверху погрешности процедуры  $Q_B$  на классе  $C$  [Белецкий, 2006].

**Теорема 3.** Существует абсолютная константа  $a < \infty$  такая, что справедливо неравенство

$$\nu(Q_B, C) \leq a \sqrt{\frac{gn}{m_0} + \frac{h}{m_h}}. \quad (10)$$

Нижняя оценка сложности класса задач отличается от верхней оценки (10) на абсолютную константу. Таким образом, проблема минимизации среднего риска решена для дискретных объектов с независимыми признаками: построены оптимальные оценки погрешности процедур распознавания в зависимости от входных параметров задачи.

---

### Байесовская процедура распознавания на цепях Маркова

---

Процедуры распознавания для независимых признаков имеют ограниченную область практических приложений. Большой интерес представляет развитие байесовских процедур распознавания на случай зависимых испытаний, связанных в цепь Маркова. Для того чтобы исследовать эффективность процедур распознавания на цепях Маркова и обосновать применение этих процедур на практике, необходимо изучить поведение оценок переходных вероятностей.

Рассмотрим ситуацию, когда  $x_1, x_2, \dots, x_n$  образуют последовательность зависимых случайных величин, связанных в цепь Маркова. Для модели цепи Маркова первого порядка вероятность цепочки  $x_1, x_2, \dots, x_n$  задается соотношением

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n | f) = P(x_1 | f) \times P(x_2 | x_1, f) \times \dots \times P(x_n | x_{n-1}, f). \quad (11)$$

Здесь  $P(x_1 | f)$  – начальное распределение вероятностей величины  $x_1$ ,  $P(x_k | x_{k-1}, f)$ ,  $k = 2, \dots, n$ , – нестационарные переходные вероятности. Как и в дискретном случае полагаем, что величины  $x_j \in \{0, 1, \dots, g-1\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ ;  $f \in \{0, 1, \dots, h-1\}$ ;  $g$  – число значений признаков,  $h$  – число классов.

Начальное распределение вероятностей  $P(x_1 = d_1 | f = i)$  аппроксимируется частотой  $\frac{k(d_1, i)}{m_1}$ , где

$k(d_1, i)$  – количество значений, равных  $d_1$  в первом столбце матрицы  $V_i$ . В байесовской процедуре распознавания используются оценки переходных вероятностей, построенных в виде частот

$$\hat{p}(x_j = d_j | x_{j-1} = d_{j-1}, i) = \frac{k((d_{j-1}, d_j), i)}{k(d_{j-1}, i)}, j = 2, \dots, n \quad (12)$$

Здесь  $k((d_{j-1}, d_j), i)$  – число пар  $(d_{j-1}, d_j)$  в строках матрицы  $V_i$ ,  $k(d_{j-1}, i)$  – число значений, равных  $d_{j-1}$  в  $(j-1)$ -м столбце матрицы  $V_i$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, h-1\}$ .

В монографии [Гупал, Сергиенко, 2008] исследовались свойства оценок переходных вероятностей (12). На основе этих результатов получены асимптотические оценки погрешности байесовской процедуры распознавания, которые аналогичны оценкам для независимых признаков.

---

### Индуктивный подход в математике

---

В монографии [Гупал, Сергиенко, 2008] излагаются основные принципы дедуктивного и индуктивного подходов в математике. Дедуктивно-аксиоматический подход используется в искусственной среде, созданной человеком, где основным требованием является получение точного решения и строгое доказательство теорем. Дедуктивный вывод проводится на основе лишь одного класса – истинных утверждений, ложные утверждения не используются. Отсюда следует неполнота формальных систем.

Индуктивный подход имеет непосредственное отношение к естественным наукам, поскольку объекты и явления природы изучаются на основе измерений и опытных данных. В индуктивном подходе на основе конечного числа наблюдений и исходов предыдущих экспериментов невозможно точно предсказать исход следующего эксперимента. Принципы индуктивных вычислений кардинально отличаются от дедуктивных принципов. Индуктивные процедуры формируют приближенное решение задачи, оценка погрешности которого (как мы видели для байесовских процедур) зависит от входных параметров задачи, причем она стремительно убывает при увеличении объемов обучающих выборок. В математике и образовании индуктивный подход широко не использовался, поскольку до последнего времени он не имел убедительного обоснования.

Дедуктивные вычисления проводятся на основе одного класса – истинных утверждений. Индуктивные процедуры строятся на основе информации, которая представлена в обучающих выборках. Причем, обучающие выборки содержат информацию относительно конечного числа классов наблюдаемых

---

объектов (по крайней мере, не менее двух). Поэтому для них удается построить эффективные и даже оптимальные процедуры распознавания.

В монографии, по сути, впервые проведено обоснование индуктивного подхода с точки зрения построения эффективных процедур распознавания. Сделан вывод о том, что современную математику следует считать объединением дедуктивного и индуктивного подходов. Сфера применения дедуктивного подхода – получение точных решений в задачах малой размерности; область применения индуктивного подхода – решение задач распознавания и прогнозирования большой размерности на основе информации в обучающих выборках. На наш взгляд, эти выводы будут полезны математикам, изучающим проблемы построения оснований современных математических дисциплин.

---

### Заключение

---

Опыт решения задач в области компьютерного материаловедения (наплавочные материалы, качественные стали, сложные материалы) показал высокую достоверность методов индуктивного вывода. Разработанные методы продемонстрировали свою эффективность при решении сложных биологических задач, в частности, при моделировании процесса селекции сельскохозяйственных культур и прогнозировании белковых соединений. На основе байесовских процедур исследуются диагностические способы определения степени злокачественных опухолей головного мозга. Можно сделать вывод о том, что индуктивные процедуры имеют серьезные перспективы развития, поскольку процессы, протекающие в живой природе, выполняются на основе индуктивных вычислений.

---

### Благодарности

---

Работа опубликована при финансовой поддержке проекта **ITHEA XXI** Института информационных теорий и приложений FOI ITHEA Болгария [www.ithea.org](http://www.ithea.org) и Ассоциации создателей и пользователей интеллектуальных систем ADUIS Украина [www.aduis.com.ua](http://www.aduis.com.ua).

---

### Библиография

---

- [Белецкий, 2006] Белецкий Б.А., Вагис А.А., Васильев С.В., Гупал Н.А. Сложность байесовской процедуры индуктивного вывода "Проблемы управления и информатики", 2006, №6. С.55-70.
- [Вапник, 1979] Вапник В.Н. Восстановление зависимостей по эмпирическим данным. – М: Наука, 1979.– 448 с.
- [Гупал, 1995] Гупал А.М., Пашко С.В., Сергиенко И.В. Эффективность байесовской процедуры распознавания. "Кибернетика и системный анализ", 1995, №4. С.76-89.
- [Гупал, Вагис, 2001] Гупал А.М., Вагис А.А. Статистическое оценивание марковской процедуры распознавания. "Проблемы управления и информатики", 2001, №2. С.62-71.
- [Гупал, Сергиенко, 2008] Гупал А.М., Сергиенко И.В. Оптимальные процедуры распознавания.– Киев: Наукова думка, 2008.– 232 с.
- [Гэри, Джонсон, 1982] Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М: Мир, 1982.– 416 с.

---

### Сведения об авторах

---

**Вагис Александра Анатольевна** – Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, к.ф.-м.н., с.н.с., Киев, Украина. E-mail: [valex\\_ic@mail.ru](mailto:valex_ic@mail.ru)

**Гупал Анатолий Михайлович** – Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, д.ф.-м.н., чл.-к. НАН Украины, зав. отд., Киев, Украина. E-mail: [gupal\\_anatol@mail.ru](mailto:gupal_anatol@mail.ru)