ИНДИВИДУАЛЬНО-ОПТИМАЛЬНЫЕ РАВНОВЕСИЯ В ИГРАХ ДВУХ ЛИЦ

Сергей Мащенко

Аннотация: *Рассматривается принцип индивидуальной оптимальности, который представляет собой обобщение принципов оптимальности по Нешу, Берже и Парето. На его основе проводится исследование стабильности различных типов равновесий в играх двух лиц.*

Keywords*: равновесие по Нешу, равновесие по Берже, стабильность равновесий, индивидуально-оптимальные равновесия.*

ACM Classification Keywords*: H4.2 Decision support*

Введение

Индивидуально-оптимальные равновесия представляют определенный интерес как новый принцип оптимальности в некооперативных играх, позволяющий построить общую модель, в которой каждый тип равновесия характеризуется уровнем его стабильности [Мащенко,2007,1]. В статьях [Мащенко, 2006,2007,1] рассматривается концепция индивидуальной оптимальности для произвольных игр *n* лиц, в статьях [Мащенко,2007,1;2008] она конкретизируется для игр с вогнутыми и дифференцируемыми функциями выигрыша игроков. В данной работе рассматриваются условия индивидуальной оптимальности и оценки стабильности равновесий в играх двух лиц.

Индивидуально-оптимальные равновесия

Рассмотрим игру двух лиц DG в нормальной форме $DG = \langle X_1, X_2, u_1, u_2 \rangle$, где X_1, X_2 - множества стратегий игроков; $u_1(x), u_2(x)$ - функция их выигрыша, которые определены на множестве ситуаций игры $X = X_1 \times X_2$ и принимают действительные значения. Каждый из игроков стремится получить по возможности большее значения своей функции выигрыша.

Для определения равновесных ситуаций и исследования их стабильности будем использовать принцип индивидуальной оптимальности [Мащенко, 2007,1], в соответствии с которым каждый игрок выбирает свои стратегии индивидуально, но учитывает функции выигрыша остальных игроков. Принцип индивидуальной оптимальности базируется на специальном отношении доминирования по Нешу.

Будем говорить, что ситуация $y \in X$ игры DG с вектором выигрыша $U(y) = (u_1(y), u_2(y))$ сильно доминирует по Нешу [Мащенко, 2007,1] ситуацию x с вектором выигрыша $U(x)$, и обозначим это через $y \overset{NE}{\succ\succ} x$, если ситуация y получена из ситуации x изменением каким-то одним игроком $i = 1,2$ своей стратегии, т. е. $y = (y_i, x_j), j = 1,2; j \neq i$, и $U(y) \succ\succ U(x)$ ($U(y) \succ\succ U(x) \Leftrightarrow u_i(y) > u_i(x), i = 1,2$).

Ситуация x^* называется слабым индивидуально-оптимальным равновесием (множество этих равновесий обозначим через $WIOE(DG)$), если не существует другой ситуации, которая сильно доминировала бы по Нешу x^*, т.е. $x^* \in WIOE(DG) \Leftrightarrow \neg\exists x \in X : x \overset{NE}{\succ\succ} x^*$. Таким образом, можно сказать, что в индивидуально-оптимальном равновесии каждый игрок находит такой компромисс с остальными игроками, который не выгодно никому нарушать.

Среди основных свойств индивидуально оптимальных равновесий следует отметить следующие:

- если множество X ситуаций игры является непустым компактом, а функции выигрыша игроков - непрерывны (или - в случае конечной игры), всегда существуют индивидуально-рациональные (значения выигрышей игроков не менее гарантированных) и коллективно-рациональные (оптимальные по Парето) индивидуально-оптимальные равновесия [Мащенко,2007,2];
- множество индивидуально-оптимальных равновесий включает в себя [Мащенко,2007,1;2007,2]:

$NE(DG) = \left\{ x^* \in X \middle| u_i(x^*) \geq u_i(x_i, x_j^*), \forall x_i \in X_i; i, j = 1{,}2;\ j \neq i \right\}$ - множество равновесий Неша;

$BE(DG) = \left\{ x^* \in X \middle| u_i(x^*) \geq u_i(x_i^*, x_j), \forall x_j \in X_j; i, j = 1{,}2;\ j \neq i \right\}$- множество равновесий Берже;

$SO(DG) = \left\{ x^* \in X \middle| \neg\exists U(x) \succ\succ U(x^*), \forall x \in X \right\}$ - множество слабо оптимальных по Парето (оптимальных по Слейтеру) ситуаций игры DG.

Необходимые и достаточные условия индивидуальной оптимальности для игр n лиц в общем случае были рассмотрены в [Мащенко,2006;2007,1], для игр с вогнутыми и дифференцируемыми функциями выигрыша – в [Мащенко,2007,2;2008].

Условия индивидуальной оптимальности

Обозначим через $S(x^*) = \max\limits_{i,j=1,2;j\neq i} \sup\limits_{x_i \in X_i} (u_1(x_i, x_j^*) + u_2(x_i, x_j^*))$ верхнюю границу суммы выигрышей игроков в ситуациях, которые получаются из x^* изменением игроками $i = 1{,}2$, в отдельности, своих стратегий.

Теорема 1. Если ситуация $x^* \in WIOE(DG)$ и, без ограничения общности, $u_i(x^*) > 0, i = 1{,}2$, то всегда существуют такие $\mu_i \in [0, S(x^*)], i = 1{,}2$, в частности:

$$\mu_i^* = u_i(x^*) + \left(S(x^*) - u_1(x^*) - u_2(x^*)\right)/2,\ i = 1{,}2 \tag{1}$$

что для $\forall\, i, j = 1{,}2;\ j \neq i$, и для $\forall y_i \in X_i$ справедливы неравенства:

$$\min(u_i(x) - \mu_i, u_j(x) - S(x^*) + \mu_i) \geq \min(u_i(y_i, x_j) - \mu_i, u_j(y_i, x_j) - S(x^*) + \mu_i). \tag{2}$$

Любое решение x^* системы неравенств (2) при заданных $\mu_i \in [0, S(x^*)], i = 1{,}2$, является слабым индивидуально-оптимальным равновесием.

Доказательство. Докажем достаточность. Пусть x^* удовлетворяет неравенствам (2). Отсюда следует, что для $\forall\, i, j = 1{,}2;\ j \neq i$, и для $\forall y_i \in X_i$ выполняются неравенства:

$$\begin{cases} u_i(x^*) - \mu_i \geq \min(u_i(y_i, x_j^*) - \mu_i, u_j(y_i, x_j^*) - S(x^*) + \mu_i), \\ u_j(x^*) - S(x^*) + \mu_i \geq \min(u_i(y_i, x_j^*) - \mu_i, u_j(y_i, x_j^*) - S(x^*) + \mu_i). \end{cases}$$

Тогда, если $u_i(y_i, x_j^*) - \mu_i \leq u_j(y_i, x_j^*) - S(x^*) + \mu_i$, то получим $u_i(y_i, x_j^*) \leq u_i(x^*)$. В противном случае, выполнится $u_j(y_i, x_j^*) \leq u_j(x^*)$. Таким образом, $\neg\exists x \in X : x \overset{NE}{\succ\succ} x^*$, откуда следует $x^* \in WIOE(G)$.

Докажем необходимость. Пусть $x^* \in WIOE(G)$, тогда $\neg\exists x \in X : x \overset{NE}{\succ\succ} x^*$, поэтому для $\forall\, i, j = 1{,}2;\ j \neq i$, и для $\forall y_i \in X_i$ выполняется по крайней мере одно из неравенств: $u_i(x^*) \geq u_i(y_i, x_j^*)$ или $u_j(x^*) \geq u_j(y_i, x_j^*)$. Определим μ_1, μ_2 по формулам (1). Несложно убедиться, что $\mu_i \in [0, S(x^*)], i = 1{,}2$.

Из первого неравенства следует $u_i(y_i, x_j^*) - \mu_i^* \le u_i(x^*) - \mu_i^* = -\big(S(x^*) - u_1(x^*) - u_2(x^*)\big)/2$. А из второго неравенства очевидно следует, что $u_j(y_i, x_j^*) - S(x^*) + \mu_i \le u_j(x^*) - S(x^*) + \mu_i = u_j(x^*) - S(x^*) + u_i(x^*) + $ $+ \big(S(x^*) - u_1(x^*) - u_2(x^*)\big)/2 = -\big(S(x^*) - u_1(x^*) - u_2(x^*)\big)/2$. Поскольку правые части этих неравенств всегда равны между собой, то $\min(u_i(y_i, x_j) - \mu_i, u_j(y_i, x_j) - S(x^*) + \mu_i) \le$ $\le -\big(S(x^*) - u_1(x^*) - u_2(x^*)\big)/2 = \min(u_i(x) - \mu_i, u_j(x) - S(x^*) + \mu_i), j = 1,2; j \ne i$. Отсюда следует, что ситуация x^* удовлетворяет неравенствам (2).♦

Таким образом, теорема 1 дает возможность конструктивно описать множество слабых индивидуально-оптимальных равновесий $WIOE(DG)$.

Следует отметить, что параметры μ_1, μ_2, которые фигурируют в неравенствах (2), имеют определенный игровой смысл. Пусть x^* является слабым индивидуально-оптимальным равновесием игры DG. Тогда, по определению, ситуация x^* представляет собой для каждого игрока $i = 1,2$ такой компромисс между желанием максимизировать свою собственную функцию выигрыша и функцию выигрыша другого игрока, от которого ему не выгодно отклоняться. Поскольку, на основании теоремы 1, ситуация x^* является решением системы неравенств (2), по крайней мере при $\mu_i^* = u_i(x^*) + \big(S(x^*) - u_1(x^*) - u_2(x^*)\big)/2$, $i = 1,2$, то легко заметить, что большему выигрышу игрока i в компромиссе соответствует большее значение параметра μ_i^*. С другой стороны, из системы неравенств (2) видно: чем больше $\mu_i \in [0, S(x^*)]$, тем большее предпочтение i-й игрок отдает собственной функции выигрыша в достигнутом компромиссе x^*, и, соответственно, на больший выигрыш он может рассчитывать.

Для индивидуально-оптимального равновесия x^* обозначим через $M_i(x^*)$ - множество значений параметра $\mu_i \in [0, S(x^*)]$, при котором x^* удовлетворяет системе неравенств (2). Отметим, что из теоремы 1 следует $M_i(x^*) \ne \varnothing, i = 1,2$.

Лемма. Система неравенств (2) эквивалентна:

$$\begin{cases} \min(u_i(y_i, x_j^*) - u_i(x^*),\ u_j(y_i, x_j^*) - u_i(x^*) - S(x^*) + 2\mu_i^*) \le 0, & (3) \\ \min(u_j(y_i, x_j^*) - u_j(x^*),\ u_i(y_i, x_j^*) - u_j(x^*) + S(x^*) - 2\mu_i^*) \le 0. & (4) \end{cases}$$

Доказательство. Несложно убедиться, что неравенства (2) будут иметь место тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} u_i(x^*) - \mu_i^* \ge \min(u_i(y_i, x_j^*) - \mu_i^*, u_j(y_i, x_j^*) - S(x^*) + \mu_i^*), \\ u_j(x^*) - S + \mu_i^* \ge \min(u_i(y_i, x_j^*) - \mu_i^*, u_j(y_i, x_j^*) - S(x^*) + \mu_i^*), \end{cases}$$

что эквивалентно (3), (4). ♦

Приведенные выше рассуждения о смысле параметров μ_1, μ_2 развивает далее следующая теорема.

Теорема 2. Справедливы следующие утверждения:

$$x^* \in NE(DG) \Leftrightarrow \exists \mu_i^* \in M_i(x^*) : \mu_i^* = S(x^*), i = 1,2, \tag{5}$$

$$x^* \in SO(DG) \Rightarrow \exists \mu_i^* \in M_i(x^*) : \mu_1^* + \mu_2^* = S(x^*), \tag{6}$$

$$x^* \in BE(DG) \Leftrightarrow \exists \mu_i^* \in M_i(x^*) : \mu_i^* = 0, i = 1,2. \tag{7}$$

Доказательство. Сначала докажем отношение (5). Пусть $x^* \in NE(DG)$. Тогда $u_i(x^*) \geq u_i(y_i, x_j^*), \forall y_i \in X_i; i, j = 1{,}2; j \neq i$. При таких условиях неравенства (3) будут справедливы при $\forall \mu_i \in [0, S(x^*)], i = 1{,}2$, в том числе, и при $\mu_i^* = S(x^*), i = 1{,}2$. Неравенства (4) выполнятся при значениях $\mu_i^* = S(x^*), i = 1{,}2$, т.к. $u_i(y_i, x_j^*) - u_j(x^*) + S(x^*) - 2\mu_i^* = u_i(y_i, x_j^*) - u_j(x^*) - S(x^*) \leq 0$ для $\forall y_i \in X_i$; $i, j = 1{,}2; j \neq i$. Отсюда, на основании леммы, получим $S(x^*) \in M_i(x^*), i = 1{,}2$.

Пусть $S(x^*) = \mu_i^* \in M_i(x^*), i = 1{,}2$. Тогда, согласно лемме, при значениях $\mu_i^* = S(x^*), i = 1{,}2$ должны выполняться неравенства (3), (4). Поскольку в (3) выражение $u_j(y_i, x_j^*) - u_i(x^*) - S(x^*) + 2\mu_i^* = u_j(y_i, x_j^*) - u_i(x^*) + S(x^*) > 0$ для $\forall y_i \in X_i; i, j = 1{,}2; j \neq i$, то неравенства (3) будут эквивалентны $u_i(x^*) \geq u_i(y_i, x_j^*), \forall y_i \in X_i; i, j = 1{,}2; j \neq i$. Следовательно $x^* \in NE(DG)$.

Докажем отношение (6). Пусть $x^* \in SO(DG)$. Тогда $\neg\exists x \in X : U(x) \succ\succ U(x^*)$, т.е. $\neg\exists x \in X : u_i(x) > u_i(x^*), i = 1{,}2$. В частности, не существует отклонения любого, но только одного, игрока $i = 1{,}2$ от ситуации x^*, при котором в полученной ситуации $(y_i, x_j^*), j = 1{,}2; j \neq i$, выполняются неравенства $u_1(y_i, x_j^*) > u_1(x^*)$ и $u_2(y_i, x_j^*) > u_2(x^*)$. Таким образом, $x^* \in WIOE(DG)$. Отсюда, согласно теореме 1, при $\mu_i^* = u_i(x^*) + \left(S(x^*) - u_1(x^*) - u_2(x^*)\right)/2$, $i = 1{,}2$, ситуация x^* удовлетворяет неравенствам (2). Тогда очевидно $\mu_1^* + \mu_2^* = S(x^*)$.

Докажем отношение (7). Пусть $x^* \in BE(DG)$. Тогда $u_i(x^*) \geq u_i(x_i^*, y_j), \forall y_j \in X_j; i, j = 1{,}2; j \neq i$. При таких условиях неравенства (4) будут справедливы при $\forall \mu_i \in [0, S(x^*)], i = 1{,}2$, в том числе, и при $\mu_i^* = 0, i = 1{,}2$. Неравенства (3) выполнятся при значениях $\mu_i^* = 0, i = 1{,}2$, поскольку $u_j(y_i, x_j^*) - u_i(x^*) - S(x^*) + 2\mu_i^* = u_i(y_i, x_j^*) - u_j(x^*) - S(x^*) \leq 0$ для $\forall y_j \in X_j$; $i, j = 1{,}2; j \neq i$. Отсюда, на основании леммы, получим $0 \in M_i(x^*), i = 1{,}2$.

Пусть $0 = \mu_i^* \in M_i(x^*), i = 1{,}2$. Тогда, на основании леммы, при значениях $\mu_i^* = 0, i = 1{,}2$, должны выполняться неравенства (3), (4). Поскольку в (4) выражение $u_i(y_i, x_j^*) - u_j(x^*) + S(x^*) - 2\mu_i^* = u_j(y_i, x_j^*) - u_i(x^*) + S(x^*) > 0$ для $\forall y_i \in X_i; i, j = 1{,}2; j \neq i$, то неравенства (4) будут эквивалентны $u_i(x^*) \geq u_i(x_i^*, y_j), \forall y_j \in X_j; i, j = 1{,}2; j \neq i$. Следовательно $x^* \in BE(DG)$. ♦

На основании теоремы 2 можно сделать следующие выводы. Если ситуация x^* - равновесие Неша, которое не выгодно нарушать каждому из игроков в отдельности, то она стабильна для обоих игроков и является индивидуально-оптимальным равновесием с оценкой $(\mu_1 + \mu_2)/S(x^*) = 2$. Оптимальная по Парето ситуация, которая стабильна лишь для пары игроков, которые действуют сообща, может быть получена как индивидуально-оптимальное равновесие при $(\mu_1 + \mu_2)/S(x^*) = 1$, а равновесие Берже, которое нестабильно для каждого игрока, будет иметь наименьшую оценку $(\mu_1 + \mu_2)/S(x^*) = 0$. Остальные индивидуально-оптимальные равновесия имеют промежуточные значения величины $(\mu_1 + \mu_2)/S(x^*)$ на интервале [0, 2] в зависимости от уровня толерантности игроков.

На основании приведенных выше выводов можно выдвинуть гипотезу, что желание каждого игрока увеличить свой индивидуальный выигрыш в достигнутом компромиссе, может быть оценено величиной

$(\mu_1+\mu_2)/S(x^*)$, которая характеризует стабильность индивидуально-оптимального равновесия. Поскольку индивидуально-оптимальное равновесие может быть одновременно и равновесием Неша, и Берже, и Парето-оптимальной ситуацией, то целесообразно оценить как максимальный, так и минимальный уровни его стабильности.

Максимальный уровень стабильности индивидуально-оптимального равновесия представляет собой агрегированную характеристику того, насколько бескомпромиссными могут быть игроки для удержания равновесия. С другой стороны, минимальный уровень стабильности - это агрегированная характеристика того, насколько толерантным должны быть игроки для удержания равновесия. Эти предельные характеристики могут дать ценную информацию для более глубокого исследования ситуации равновесия. Так, например, если некоторое индивидуально-оптимальное равновесие является равновесием Неша и равновесием Берже (один из очень интересных и особенно стабильных типов равновесия), то согласно теореме 2, величина $\max(\mu_1+\mu_2)/S(x^*)=2$, а $\min(\mu_1+\mu_2)/S(x^*)=0$.

Оценка стабильности равновесий

Для нахождения максимального (минимального) уровня стабильности индивидуально-оптимального равновесия x, который мы обозначим через $\hat{\mu}^{\max}(x)$ (обозначим через $\hat{\mu}^{\min}(x)$), сформулируем оптимизационную задачу относительно μ_i, $i=1,2$, в которой ситуация x фигурирует как параметр:

$$\hat{\mu}^{\max}(x)=\max(\mu_1+\mu_2)/S(x)\ \ (\hat{\mu}^{\min}(x)=\min(\mu_1+\mu_2)/S(x)), \tag{8}$$

$$\min(u_i(x)-\mu_i, u_j(x)-S(x)+\mu_i)\geq \min(u_i(y_i,x_j)-\mu_i, u_j(y_i,x_j)-S(x)+\mu_i), j=1,2; j\neq i \tag{9}$$

$$\mu_i\in[0,S(x^*)], i=1,2. \tag{10}$$

Функцию $\hat{\mu}^{\max}:WIOE(G)\to[0,n]$ ($\hat{\mu}^{\min}:WIOE(G)\to[0,n]$) назовем критерием максимальной (минимальной) стабильности индивидуально-оптимального равновесия x игры *DG*. Ограничение (9), (10) описывают, согласно теореме 1, условия слабой индивидуальной оптимальности ситуации $x\in X$. Поскольку заранее, как правило, не известно, какая ситуация игры является индивидуально-оптимальным равновесием игры *DG*, то ситуации, которые не индивидуально-оптимальны, будут приводить к несовместности ограничений (9), (10). Если считать, что при несовместной системе ограничений для $k=1,2$ игроков в ситуации $x\in X$, функции $\mu^{\max}(x)=-k$ и $\mu^{\min}(x)=-k$, а при совместной системе ограничений (9), (10) $\mu^{\max}(x)=\hat{\mu}^{\max}(x)$ и $\mu^{\min}(x)=\hat{\mu}^{\min}(x)$, то область определения функций $\mu^{\max}(x)$ и $\mu^{\min}(x)$ будет расширена до всего множества ситуаций игры. Следует отметить, что конструктивно реализовать такое расширение области определения функций можно посредством аппарата штрафных функций. Таким образом, $\mu^{\max}:X\to[-2,2]$ и $\mu^{\min}:X\to[-2,2]$ будут соответственно критериями максимальной и минимальной стабильности ситуаций $x\in X$.

Введенные нами критерии максимальной и минимальной стабильности ситуаций игры *DG* являются агрегированными характеристиками их стабильности для обоих игроков в целом, что предусматривает коллективную процедуру их применения. Поскольку при некооперативном поведении игроков возможности любых коллективных процедур могут быть очень ограниченными, то стоит использовать индивидуальные оценки стабильности ситуаций игры.

Обозначим через $D_i(x)$, $i \in N$, множества допустимых решений задач (8) (10). Обратим внимание на то, что при фиксированном $x \in WIOE(G)$ задачи (8) - (10) естественно декомпозируются на пары независимых задач математического программирования:

$$\hat{\mu}_i^{\max}(x) = \max\{\mu_i / S_i(x) | \mu_i \in D_i(x)\}, i = 1{,}2, \quad \hat{\mu}_i^{\min}(x) = \min\{\mu_i / S_i(x) | \mu_i \in D_i(x)\}, i = 1{,}2.$$

Расширяя область определения функций $\hat{\mu}_i^{\max}(x), \hat{\mu}_i^{\min}(x)$ получим для $i = 1{,}2$:

$$\mu_i^{\max}(x) = \begin{cases} \hat{\mu}_i^{\max}(x), & D_i(x) \neq \varnothing, \\ -1, & D_i(x) = \varnothing, \end{cases} \qquad \mu_i^{\min}(x) = \begin{cases} \hat{\mu}_i^{\min}(x), & D_i(x) \neq \varnothing, \\ -1, & D_i(x) = \varnothing. \end{cases} \tag{11}$$

Если функции $\mu^{\max}(x)$ и $\mu^{\min}(x)$ представляют собой суммарные оценки стабильности ситуаций, то функции $\mu_i^{\max}(x): X \to [-1{,}1]$ и $\mu_i^{\min}(x): X \to [-1{,}1]$ могут интерпретироваться как соответственно максимальная и минимальная индивидуальные оценки стабильности отдельно для игрока $i = 1{,}2$.

Для общей игры n лиц задачи поиска индивидуальных оценок стабильности типа (11) достаточно сложны [Мащенко, 2007,1]. В игре двух лиц появляется возможность их решения в аналитическом виде.

Теорема 3. Пусть, без ограничения общности, $u_i(x) > 0, i = 1{,}2; \forall x \in X$. Тогда максимальная и минимальная оценки стабильности ситуации $x \in X$ игры DG определяются соответственно:

$$\mu_i^{\max}(x) = \begin{cases} 1, \quad u_i(x) \geq u_i(y_i, x_j), \forall y_i \in X_i, \\ \dfrac{1}{2}\left(1 + \min\limits_{y_i \in X_i}\left\{u_i(x) - u_j(y_i, x_j) \middle| u_i(x) < u_i(y_i, x_j)\right\} \big/ S(x)\right), u_j(x) \geq u_j(y_i, x_j), \\ -1, \quad \exists y_i \in X_i : u_i(x) < u_i(y_i, x_j), u_j(x) < u_j(y_i, x_j), \end{cases} \tag{12}$$

$$\mu_i^{\min}(x) = \begin{cases} 0, \quad u_j(x) \geq u_j(y_i, x_j), \forall y_i \in X_i, \\ \dfrac{1}{2}\left(1 - \min\limits_{y_i \in X_i}\left\{u_j(x) - u_i(y_i, x_j) \middle| u_j(x) < u_j(y_i, x_j)\right\} \big/ S(x)\right), u_i(x) \geq u_i(y_i, x_j), \\ -1, \quad \exists y_i \in X_i : u_i(x) < u_i(y_i, x_j), u_j(x) < u_j(y_i, x_j), \end{cases} \tag{13}$$

где $i, j = 1{,}2; j \neq i$.

Доказательство. Рассмотрим ситуацию $x \in X$. Согласно теореме 1 $x \in WIOE(DG)$ тогда и только тогда, когда существуют такие значения параметров $\mu_i \in [0, S(x)], i = 1{,}2$, что для $\forall\, i = 1{,}2$ и для $\forall y_i \in X_i$, имеют место неравенства (9). Они, в свою очередь, согласно лемме эквивалентны неравенствам (3), (4).

Рассмотрим для $\forall\, i = 1{,}2$ следующие возможные случаи.

Пусть $\exists y_i \in X_i : u_i(x) < u_i(y_i, x_j), u_j(x) < u_j(y_i, x_j)$, где $j = 1{,}2; j \neq i$, тогда $(y_i, x_j) \overset{NE}{\succ\!\succ} x$, поэтому ситуация $x \notin WIOE(DG)$ и множество допустимых решений оценочных задач (11) $D_i(x) = \varnothing$. Расширяя область определения функций $\hat{\mu}_i^{\max}(x), \hat{\mu}_i^{\min}(x)$ получим $\mu_i^{\max}(x) = -1, \mu_i^{\min}(x) = -1$.

Пусть для некоторого фиксированного $y_i \in X_i$ имеет место неравенство $u_i(x) \geq u_i(y_i, x_j)$, где $j = 1{,}2; j \neq i$. Тогда неравенство (4) будет справедливым для любых $\mu_i \in [0, S(x)]$. Поэтому система неравенств (3), (4) будет эквивалентна (3). В свою очередь, неравенство (3) будет справедливым для любых $\mu_i \in [0, S(x)]$ при условии $u_i(x) \geq u_i(y_i, x_j)$ и будет эквивалентным неравенству $\mu_i \geq (S(x) + u_j(x) - u_i(y_i, x_j))/2$. Таким образом, если $u_i(x) \geq u_i(y_i, x_j)$ для $\forall y_i \in X_i$, то система неравенств (3), (4), при условии $\mu_i \in [0, S(x)]$, будет эквивалентна неравенству $\mu_i \le S(x)$. Если $u_i(x) < u_i(y_i, x_j)$ для некоторых $y_i \in X_i$, то система неравенств (3), (4) будет эквивалентна $\mu_i \le \frac{1}{2}\left(S(x) + \min_{y_i \in X_i} \{(u_i(x) - u_j(y_i, x_j)) | u_i(x) < u_i(y_i, x_j)\}\right)$. Отсюда следует, что максимальная индивидуальная оценка (11) стабильности отдельно для игрока $i = 1,2$ будет иметь вид (12).

Если для некоторого фиксированного $y_i \in X_i$ имеет место неравенство $u_j(x) \ge u_j(y_i, x_j)$, где $j = 1,2; j \ne i$, тогда неравенство (3) будет справедливым для любых $\mu_i \in [0, S(x)]$. Поэтому система неравенств (3), (4) будет эквивалентна (4). В свою очередь, неравенство (4) будет справедливо для любых $\mu_i \in [0, S(x)]$ при условии $u_j(x) \ge u_j(y_i, x_j)$ и будет эквивалентно неравенству $\mu_i \ge (S(x) - u_j(x) + u_i(y_i, x_j))/2$. Таким образом, если $u_j(x) \ge u_j(y_i, x_j)$ для $\forall y_i \in X_i$, то система неравенств (3), (4), при условии $\mu_i \in [0, S(x)]$, будет эквивалентна неравенству $\mu_i \ge 0$. Если $u_j(x) < u_j(y_i, x_j)$ для некоторых $y_i \in X_i$, то система неравенств (3), (4) будет эквивалентна $\mu_i \ge \frac{1}{2}\left(S(x) - \min_{y_i \in X_i} \{(u_j(x) - u_i(y_i, x_j)) | u_j(x) < u_j(y_i, x_j)\}\right)$. Отсюда следует, что минимальная индивидуальная оценка (11) стабильности ситуации $x \in X$ отдельно для игрока $i \in N$ будет иметь вид (13). Теорема доказана. ♦

Заключение

Принцип индивидуальной оптимальности обобщает классические принципы оптимальности в некооперативных играх и расширяет класс конфликтно разрешимых игр. Применение этого принципа обосновано, если конфликт между игроками не может быть разрешен согласно классическим принципам оптимальности и игроки соглашаются идти на компромисс ради его решения.

Литература

[Мащенко,2007,1] Мащенко С.О. Исследование стабильности равновесий на основе принципа индивидуальной оптимальности //Кибернетика и системный анализ.-2007. -4. –С. 162-169.

[Мащенко,2006] Мащенко С. О. Слабкі індивідуально- оптимальні рівноваги// Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. -2006.–2.-С.169-177.

[Мащенко,2007,2] Мащенко С. О. Індивідуально-оптимальні рівноваги в некооперативних опуклих іграх// Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. -2007.–4.-С.133-139.

[Мащенко,2008] Мащенко С. О. Локальні умови слабкої індивідуальної оптимальності рівноваг// Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. -2008.–1.-С.127-136.

Информация об авторе

***Мащенко Сергей Олегович** – Доцент, кандидат физ.-мат. Наук, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко; Пр. Академика Глушкова, 6, Киев – 207, Украина; e-mail: msomail@yandex.ru*